Carmelo Di Stefano

QUADERNI DI MATEMATICA RICREATIVA

Vol. 1 Aritmetica

INDICE

Introduzione

La matematica ricreativa, cioè il giocare con la matematica, forse è più vecchia della stessa matematica, poiché l'essere umano ha probabilmente pensato a giocare ancora prima di dedicarsi alle cose più serie, quale la sopravvivenza. Come acutamente osserva Roger Caillois nel suo fondamentale testo *I giochi e gli uomini*: «*Il gioco riposa e diverte. Evoca un'attività non soggetta a costrizioni, ma anche priva di conseguenze per la vita reale*.»
Gli storici hanno trovato manufatti di dadi o di scacchiere per giochi di vario tipo, nelle civiltà più antiche. Pare che il dado stesso sia stato inventato da un certo Palamede, addirittura già nel 2700 a.C. Ovviamente non tutti i giochi hanno una base matematica, ma molti sì, o comunque molti si giocano meglio conoscendo la matematica. E non vogliamo riferirci alla matematica per calcolare, quanto piuttosto a quella per ragionare.
Sempre con Caillois: «*Il gioco non prepara a un mestiere preciso, esso allena in generale alla vita aumentando ogni capacità di superare gli ostacoli o di far fronte alle difficoltà. È assurdo e non serve a niente nella vita reale, lanciare il più lontano possibile un martello o un disco di metallo, o riprendere e rilanciare continuamente una palla con una racchetta. Ma è utilissimo avere dei muscoli possenti e dei riflessi pronti.*»
Pertanto sarà inutile sapere svolgere un certo quesito, che in alcuni casi potrebbe anche farci vincere una gara e quindi darci almeno un premio di autostima, ma certamente è fondamentale il fatto che per risolvere il quesito dobbiamo abituarci a ragionare.
Lo scopo è quello di fornire al lettore notizie di tipo storico, ma nello stesso tempo di mostrare problemi standard unitamente con delle tecniche risolutive. Quindi saranno affrontati alcuni quesiti, spesso tratti da gare matematiche nazionali ed internazionali, e infine saranno proposti quesiti analoghi da risolvere. I problemi sono di diversi livelli opportunamente se-

gnalati, rivolti perciò a risolutori con diverse conoscenze culturali.
La speranza è che questi volumetti possano stimolare ciascuno dei suoi lettori a giocare con la matematica, cercando in tal modo di allontanare quella troppo diffusa *antipatia*, che molti hanno verso questa disciplina. Anche perché noi crediamo che le motivazioni di questo atteggiamento ostile siano legati proprio al fatto che spesso, nelle scuole, la matematica viene proposta solo come procedura di calcolo, priva di applicazioni di qualsiasi natura e soprattutto rivolta solo a quelli che hanno il bernoccolo della matematica.
Alla fine del volume si trova una piccola bibliografia di testi di matematica ricreativa fra i più importanti e fra i quali parecchi di essi sono stati consultati per la stesura dello stesso.
.

Come usare il volume

Per quello che riguarda l'uso del libro, dato che esso è destinato a lettori con diverse capacità risolutive, indicheremo con opportuni simboli i problemi svolti e proposti, per facilitare la lettura, e anche per evitare facili scoraggiamenti da parte di chi non ha le conoscenze adatte per risolvere un dato quesito.
In particolare indicheremo con opportuni simboli i quesiti e la teoria a seconda delle conoscenze di ciascun lettore. In particolare useremo

⓪ per chi ha conoscenze a livello di scuola elementare.
① per chi ha conoscenze a livello di scuola media inferiore.
② per chi ha conoscenze a livello di primo biennio di scuola media superiore.
③ per chi ha conoscenze a livello di triennio finale di scuola media superiore.

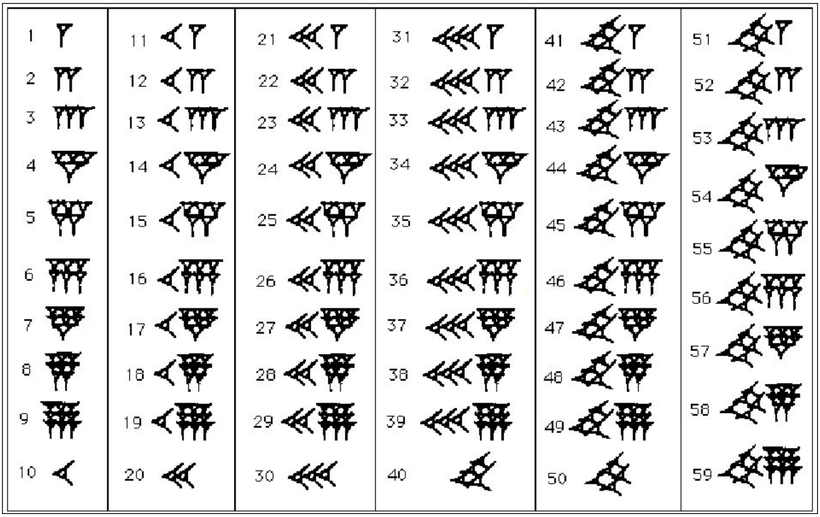
Ovviamente la scelta che un certo argomento sia di un livello piuttosto che di un altro è del tutto personale, pertanto alcuni quesiti possono risultare più semplici o più difficili, per il risolutore di quanto egli si aspetti dato il simbolo associato.
Le risposte alle attività proposte alla fine di ciascun capitolo, si trovano alla fine del volume.
Poiché proponiamo diversi quesiti assegnati in gare nazionali ed internazionali, li indicheremo con delle sigle, seguite da un anno, che è quello in cui sono stati assegnati. In particolare

A, indica Abacus, che è una sfida internazionale, tenuta on line da diversi anni dalla Grace Church School, ma che si basa su una centenaria rivista ungherese, chiamata proprio Abacus.
AHSME indica i quesiti assegnati alla Annual High School Mathematical Examination, che è una gara di matematica che si svolge annualmente negli Stati Uniti fra studenti di High

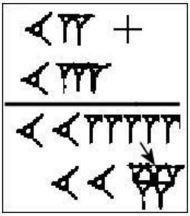
School, che in qualche modo è simile alla nostra scuola superiore.
B, indica i quesiti assegnati ai giochi della Bocconi, nelle varie categorie e varie selezioni, semifinali o finali.
GAB per il Biennio e **GAT** per il Triennio, indica i Giochi di Archimede, che rappresentano la prima selezione per le Olimpiadi della Matematica.

Un po' di storia

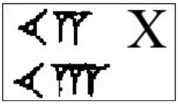
L'aritmetica è una disciplina che nell'antichità era svolta in modo molto diverso da quanto succede adesso, perché le cifre con cui scriviamo i numeri interi ai giorni nostri sono state diffuse nel mondo occidentale solo nel 1202, quando il mercante pisano Leonardo Fibonacci, scrisse un libro, *Liber Abaci* (Il libro dell'abaco), in cui descriveva appunto le dieci cifre che oggi chiamiamo arabe. E in effetti parecchi dei giochi aritmetici sono appunto legati al modo moderno di scrivere i numeri. Tuttavia l'aritmetica è la scienza dei numeri interi, pertanto anche se essi erano scritti in modo diverso, per esempio con la numerazione romana per la quale per esempio V = 5 e XVII = 17, ugualmente potevano enunciarsi quesiti ricreativi.
Nella figura seguente mostriamo i numerali usati nell'antica Babilonia in un periodo vicino al 2400 a.C.



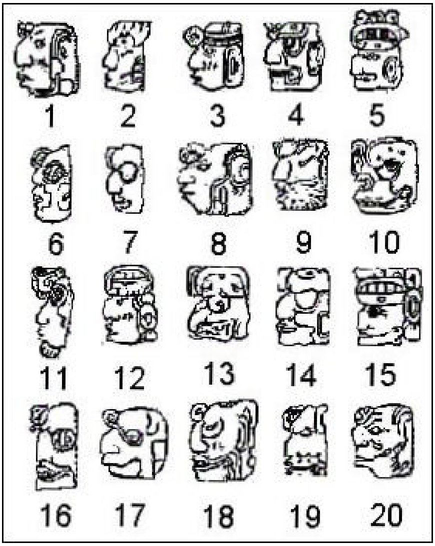
Come si nota anche in questo caso non è sempre facile effettuare le operazioni con questi simboli. Così per esempio è molto semplice eseguire la somma seguente, in cui basta riscrivere tutti i simboli raggruppando le 5 unità nel simbolo corrispondente.



Ma è certamente più complicato eseguire la seguente moltiplicazione:



O ancora più difficoltoso è lavorare con i bellissimi simboli usati dai Maya dell’America Centrale all’inizio dell’era cristiana.



Tutto dipende dal fatto che le notazioni precedenti non sono di tipo *posizionale*, come quelle attualmente usate. Cioè ogni simbolo (cifra), ha sempre lo stesso valore. Così nella numerazione romana III equivale a 1 + 1 + 1 = 3, mentre nel nostro sistema 111 = 100 + 10 + 1. Pertanto nel nostro sistema il valore della cifra dipende dalla propria posizione, mentre nel sistema romano ciò vale solo in alcuni casi, per esempio XI = 10 + 1, mentre IX = 10 – 1. Il nostro sistema è perciò molto più potente, intanto perché più *economico*. Per scrivere 111 in notazione romana usiamo sempre solo 3 simboli: CXI, ma per scrivere 112 già ne usiamo quattro: CXII e per 118 addirittura sei: CXVIII. Inoltre eseguire operazioni leggermente più complicate dell'addizione, nel nostro sistema diventa molto semplice, basta conoscere solo alcune moltiplicazioni, cioè le 81 moltiplicazioni dei numeri di una cifra fra di loro (da 1 × 1 a 9 × 9) e l'applicazione della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma. Infatti in questo caso per eseguire per esempio 123 × 456 basta scrivere i numeri tenuto conto del loro valore posizionale:

$$123 \times (400 + 50 + 6)$$

Quindi applicare la proprietà distributiva:

$$123 \times 400 + 123 \times 50 + 123 \times 6 = 49200 + 6150 + 738$$

In questo modo i numeri ottenuti appartengono tutti a *ordini* diversi, quindi li scriveremo con una regola, che, solo apparentemente, è diversa da quella usata di solito:

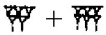
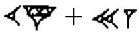
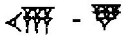
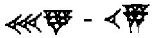
$$\begin{array}{ll} 123 & \times \\ \underline{456} & = \\ 49200 & \\ 06150 & \\ \underline{00738} & \\ 56088 & \end{array}$$

Ma che risulta la stessa scambiando l'ordine degli addendi e sostituendo i consueti spazi finali con gli zeri, che tengono conto appunto della relativa posizione delle cifre.

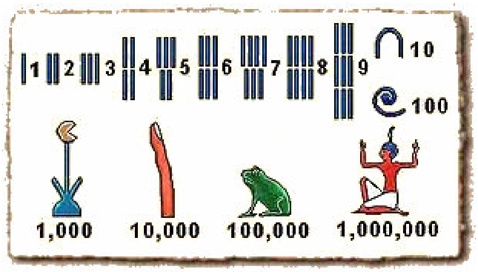
$$\begin{array}{rl} 123 & \times \\ \underline{456} & = \\ 738 & \\ 6150 & \\ \underline{49200} & \\ 56088 & \end{array}$$

È importante comprendere comunque che prima di arrivare alle nostre regole così semplici sono dovuti passare millenni di ricerche, di invenzioni, di proposte, di prove. Così per esempio i simboli + e –, apparvero per la prima volta solo nel 1489, il che non significa che furono immediatamente usati, infatti il loro uso divenne norma solo nel XIX secolo. L'attuale simbolo di uguaglianza fu proposto solo nel 1557. E analoghe *odissee* hanno subito tutti gli altri simboli e procedure attuali.

Attività

1. ⓪ Eseguire la seguente somma fra numeri scritti con notazione romana: XXV + XVI.
2. ⓪ Eseguire la seguente somma fra numeri scritti con notazione romana: XIV + IX.
3. ⓪ Eseguire la seguente differenza fra numeri scritti con notazione romana: XVIII – XI.
4. ⓪ Eseguire la seguente differenza fra numeri scritti con notazione romana: CLXVI – CXXIV.
5. ⓪ Eseguire la somma  .
6. ⓪ Eseguire la somma .
7. ⓪ Eseguire la differenza  .
8. ⓪ Eseguire la differenza  .
9. ① Quali numeri si scrivono usando 2 simboli sia in notazione decimale che con la numerazione romana?
10. ① Quali numeri inferiori a 100, si scrivono usando meno simboli con la numerazione romana rispetto alla notazione decimale?
11. ① Quale numero inferiore a 100, si scrive usando più simboli con la numerazione romana?
12. ① Quali numeri si scrivono usando 3 simboli sia in notazione decimale che con la numerazione romana?
13. ① Quale numero inferiore a 1000, si scrive usando più simboli con la numerazione romana?

Dal sito http://www.eyelid.co.uk/index.htm, abbiamo scaricato i geroglifici usati per i numeri



usali per eseguire le seguenti operazioni

14. ① ; ; 

15. ② **(A1997)** Scriviamo i numeri romani usando degli stuzzicadenti, uno intero per I, uno spezzato per V e così via. Usando un ulteriore stuzzicadenti rendere vere le seguenti uguaglianze:
    a. V = II + VIII
    b. VII + V = III
    c. VI = II + VIII

Le risposte commentate si trovano a partire da pagina 81.

Scoprire un numero pensato

Cominciamo a considerare alcuni giochi di cosiddetta magia matematica. Ossia far pensare a qualcuno un numero, fargli eseguire una serie di operazioni su di esso e quindi farsi comunicare il risultato. Il *mago* a questo punto solo da questa informazione è in grado di indovinare il numero pensato.

⓪ Cominciamo con un esercizio che non dice di scoprire un numero, ma di determinare a che numero si arriva facendo una serie di operazioni. Il quesito è stato assegnato alla semifinale italiana dei giochi della Bocconi del 1996.
Scrivo il numero 1996 *su un foglio bianco. Essendo pari lo divido per* 2 *ottenendo, con calcoli mentali o con l´aiuto della calcolatrice,* 998, *che scrivo sul foglio. Continuo allora con queste regole:*
a) se l´ultimo numero scritto è pari, lo divido per 2 *e scrivo il risultato;*
b) se il numero è dispari, gli aggiungo 1 *e scrivo il risultato ottenuto.*
Dopo un po´ di passaggi, ottengo il numero 2 *che scrivo sul foglio. Quanti numeri sono stati scritti sul foglio?*
Vediamo la successione di operazioni:

$$1996 \to 998 \to 499 \to 500 \to 250 \to 125 \to$$
$$126 \to 63 \to 64 \to 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2$$

quindi abbiamo scritto un totale di 14 numeri.

① Per esempio supponiamo che si dica di raddoppiare il numero pensato, aggiungervi 7, quindi moltiplicarlo per 4, sottrarvi 3, moltiplicare il risultato finora ottenuto per 5 e comunicare il numero finale. Supponiamo che venga comunicato come risultato 845. Il mago senza esitazione indovinerà che è stato pensato 18. vediamo intanto se ciò è vero.

$$18 \xrightarrow{\times 2} 36 \xrightarrow{+7} 43 \xrightarrow{\times 4} 172 \xrightarrow{-3} 169 \xrightarrow{\times 5} 845\,.$$

Vediamo di svelare cosa è accaduto e per fare ciò dobbiamo ragionare, come si fa in matematica, non su un numero particolare ma su uno generale, uno cioè che indichiamo con un simbolo, per esempio *x*. Allora le operazioni da effettuare divengono:

$$x \xrightarrow{\times 2} 2x \xrightarrow{+7} 2x+7 \xrightarrow{\times 4} 8x+28 \xrightarrow{-3} 8x+25 \xrightarrow{\times 5} 40x+125$$

Questo significa che il *mago* deve semplicemente togliere 125 dal risultato comunicato (845 – 125 = 720), quindi dividere per 40 (720 : 40 = 18) per ottenere il numero pensato senza nessun potere magico, ma utilizzando una modesta conoscenza aritmetica.
In ogni caso il numero comunicato deve finire sempre per 5, dato che moltiplicando per 40, l'ultima cifra sarà 0, aggiungendovi 125, tale cifra dovrà essere appunto 5. Quindi se qualcuno dovesse comunicare 724, il *mago* può dire immediatamente che quello ha sbagliato a calcolare.

② Una questione un po' più difficile consiste nell'indovinare più di un numero pensato. Per esempio cinque numeri in ordine crescente, che indichiamo con *a*, *b*, *c*, *d*, *e* di cui ci vengono fornite le somme

$$a + b,\ b + c,\ c + d,\ d + e,\ e + a.$$

Supponiamo che ci venga detto che le cinque somme precedenti sono 73, 93, 118, 138, e 102. Ovviamente possiamo determinare cinque numeri avendo a disposizione altrettante informazioni, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} a+b=73 \\ b+c=93 \\ c+d=118 \\ d+e=138 \\ a+e=102 \end{cases}.$$

Non dobbiamo però dimenticare che il *mago* non deve fare calcoli che a mente, quindi o lo immaginiamo particolarmente dotato di tali qualità, o cerchiamo un *trucco* più semplice. Effettuiamo le seguenti somme:

$$(a + b) + (c + d) + (a + e) = 2a + b + c + d + e$$
$$(b + c) + (d + e) = b + c + d + e$$

ottenendo rispettivamente 293 e 231. La differenza di questi numeri è

$$2a + b + c + d + e - (b + c + d + e) = 2a$$

quindi $a = \frac{293 - 231}{2} = \frac{62}{2} = 31$.

A questo punto è abbastanza facile determinare gli altri numeri per differenza:

$$b = 73 - 31 = 42;\ c = 93 - 42 = 51;$$
$$d = 118 - 51 = 67;\ \ e = 138 - 67 = 102 - 31 = 71.$$

② La precedente regola funziona se i numeri richiesti sono in numero dispari, se invece fossero in numero pari, si chiederanno sempre le somme a due a due, ma alla fine si chiederà non la somma fra il primo e l'ultimo, ma fra il secondo e l'ultimo. Così per esempio se i numeri sono quattro, a, b, c, d, chiederemo le somme

$$a + b,\ b + c,\ c + d,\ b + d.$$

Come in precedenza effettueremo due ulteriori somme di due gruppi:

$$(c + d) \text{ e } (b + c) + (b + d) = 2b + c + d$$

sottraiamo:

$$(2b + c + d) - (c + d) = 2b$$

e quindi abbiamo trovato b e perciò troveremo facilmente il resto dei numeri.

Così se per esempio:

$$a + b = 24,\ b + c = 31,\ c + d = 28,\ b + d = 43$$

avremo:

$$c + d = 28 \text{ e } (b + c) + (b + d) = 31 + 43 = 74$$

pertanto:

$$b = \frac{74 - 28}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

perciò:

$a = 24 - 23 = 1$, $c = 31 - 23 = 8$, $d = 28 - 8 = 43 - 23 = 20$.

Attività

1. ⓪ **(B2003)** Cinque amici (Alberto, Carlo, Davide, Edoardo, Filip) sono andati insieme a pescare. Alberto e Carlo, messi insieme, hanno preso 14 pesci; Carlo e Davide, insieme, ne hanno presi 20; Davide ed Edoardo, insieme, 18; Edoardo e Filip, 12; infine, Alberto e Filip ne hanno presi 16. Quanti pesci hanno preso, complessivamente, i cinque amici?
2. ⓪ **(B2008)** Una calcolatrice ha solo due tasti : il tasto "–1" (meno 1) e il tasto ":3" (diviso 3). Al momento dell'accensione, sullo schermo compare il numero 2008. Quante volte bisogna premere complessivamente, al minimo, i tasti "–1" e ":3" per poter leggere il risultato "1" sullo schermo?
3. ⓪ Procediamo come nel primo esempio svolto, ma partendo da 2008. quanti numeri complessivamente scriviamo?
4. ⓪ Modifichiamo le regole per scrivere i numeri nel primo esempio. Se il numero è dispari gli aggiungo 11 e poi lo divido per 2. Quanti numeri scrivo, partendo da 2020?
5. ① Con riferimento al precedente esercizio. Partendo da quali numeri, non dovrò mai aggiungere 11, per arrivare a 2?
6. ① Quali dei seguenti numeri: 1125, 1200, 1364, 1965, 2355, non possono essere ottenuti pensando un qualsiasi numero intero ed eseguendo su di essi le operazioni descritte nel secondo esempio svolto?
7. ① Determinare la regola per indovinare un numero pensato, di cui viene comunicato il risultato delle operazioni seguenti: raddoppiare il numero pensato, sottrarvi 4, moltiplicare per 3, aggiungere 5, moltiplicare per 6.
8. ① Con riferimento al precedente esercizio, se comunichiamo 822, che numero abbiamo pensato?

9. ① Con riferimento alla procedura dell'esercizio 4, quale dei seguenti numeri: 318, 355, 380, 426, 460, non può essere comunicato?
10. ① Determinare la regola per indovinare un numero pensato, di cui viene comunicato il risultato delle operazioni seguenti: triplicare il numero pensato, aggiungere 6, moltiplicare per 4, sottrarre 3, moltiplicare per 2.
11. ① Con riferimento al precedente esercizio, se comunichiamo 474, che numero abbiamo pensato?
12. ① Con riferimento all'esercizio 8, quale dei seguenti numeri: 353, 376, 402, 426, 450, non può essere comunicato?
13. ① **(B1996)** Adriano, Beatrice, Claudia, Domenico e Emanuela partecipano ad una tombola. Essi estraggono da un cappello una carta tra dodici numerate da 1 a 12, ogni numero corrisponde ad un premio. Ciascuno dei cinque amici estrae due carte ma, per complicare un po´ il gioco, al momento di svelare i numeri che la sorte ha attribuito ad ognuno, ciascuno indica agli altri solo la somma dei due numeri: Adriano 11, Beatrice 4, Claudia 16, Domenico 7, Emanuela 19. Indicare il minore dei 2 numeri estratti da ognuno.
14. ① **(A1998)** Nel numero 7******9, sostituire i sei * con delle cifre in modo che la somma di tre qualsiasi cifre consecutive sia 20.
15. ① **(A2001)** Pom Pom aspetta il fratellino che esca da scuola seduto su un albero. Comincia ad aspettare da quando lo accompagna, alle 8:15, e per non annoiarsi conta i tocchi di un vicino orologio, che suona una volta ogni mezzora e tante volte quanto sono le ore, ogni ora. Oggi Pom Pom a un certo punto si è addormentato e non ha sentito alcuni rintocchi e alle 1:15 del pomeriggio aveva contato 36 rintocchi. Quanto è durata al massimo la sua dormita?

16. ② **(B1996)** Il professore ha scritto 5 numeri si un foglio poi, girato il foglio, ha scritto i dieci numeri 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12, ottenuti calcolando tutte le possibili somme dei numeri prima scritti, presi a due a due. Quali erano i 5 numeri scritti all´inizio dal professore (indicare i numeri in ordine crescente)? Non è detto che i numeri scritti fossero interi.
17. ② Determinare la regola per indovinare un numero pensato, di cui viene comunicato il risultato delle operazioni seguenti: se il numero è pari dividerlo a metà, se dispari aggiungere uno e dividerlo a metà, poi aggiungere 3, moltiplicare per 4, sottrarre 2.
18. ② Con riferimento al precedente esercizio, se comunichiamo 66, che numero abbiamo pensato?
19. ② Con riferimento all'esercizio 16, quale dei seguenti numeri: 80, 82, 86, 90, 97, non può essere comunicato?
20. ② Con riferimento al penultimo esempio svolto. Se pensiamo 5 numeri interi, e comunichiamo le somme 13, 24, 31, 42, 49, perché possiamo dire che almeno una delle somme è errata?
21. ② Con riferimento all'ultimo esempio svolto. Se pensiamo 6 numeri: a, b, c, d, e, f, quali somme dobbiamo comunicare?
22. ② Con riferimento al precedente esercizio, se le somme sono rispettivamente 12, 23, 35, 49, 67, 48, quali sono i numeri pensati?
23. ② Se pensiamo 6 numeri interi: a, b, c, d, e, f, e comunichiamo le somme 20, 31, 42, 50, 56, 60, perché possiamo dire che almeno una delle somme è errata?
24. ② **(GAB2003)** Giulio fornisce a Damiano un elenco di alcuni numeri di due cifre e gli dice di sceglierne uno, poi gli chiede la somma delle cifre del numero, ed è così sicuro di poterlo indovinare. Al massimo da quanti numeri era composto l'elenco iniziale?

25. ③ **(A1998)** Scriviamo 1, 9, 9, 8 e continuiamo scrivendo la cifra delle unità della somma delle 4 cifre precedenti. Così il quinto numero sarà 7 perché 1 + 9 + 9 + 8 = 27; il sesto numero sarà 3 perché 9 + 9 + 8 + 7 = 33, e così via. Possiamo ottenere la sequenza 1, 2, 3, 4?
26. ③ Con riferimento al secondo esempio svolto, determinare quali fra le dieci cifre possono rappresentare la cifra delle decine dei risultati.

Le risposte commentate si trovano a partire da pagina 82.

La notazione posizionale

Abbiamo già detto che l'attuale sistema di numerazione da noi usato è posizionale su base 10, ciò vuol dire che usiamo dieci simboli (0, 1, 2, …, 9) per indicare i numeri e inoltre che il valore del simbolo usato dipende dal posto in cui esso è scritto. Così in 1234, 4 vale 4, 3 vale $30 = 3 \times 10$, 2 vale $200 = 2 \times 10^2$ e 1 vale $1\,000 = 10^3$.

◎ Proprio questo tipo di notazione permette di ottenere calcoli spesso solo apparentemente magici. Per esempio nella fondamentale opera in 4 volumi : *Récréations mathématiques* scritta da Edouard Lucas nel 1882, sono, fra l'altro, presentati i seguenti magici risultati:

$$
\begin{gathered}
1 \times 9 + 2 = 11 \\
12 \times 9 + 3 = 111 \\
123 \times 9 + 4 = 1111 \\
1234 \times 9 + 5 = 11111 \\
12345 \times 9 + 6 = 111111 \\
123456 \times 9 + 7 = 1111111 \\
1234567 \times 9 + 8 = 11111111 \\
12345678 \times 9 + 9 = 111111111 \\
123456789 \times 9 + 10 = 1111111111
\end{gathered}
$$

Facciamo vedere che in effetti non c'è alcun tipo di magia, ma tutto dipende solo dalle proprietà della notazione posizionale.

$$1 \times 9 + 2 = 1 \times (10 - 1) + 2 = 10 - 1 + (1 + 1) = 10 + 1 = 11$$

$$
\begin{gathered}
12 \times 9 + 3 = (10 + 2) \times (10 - 1) + (2 + 1) = \\
= 10^2 + 2 \times 10 - 10 - 2 + 2 + 1 = 10^2 + 10 + 1 = 111 \\
123 \times 9 + 4 = (10^2 + 2 \times 10 + 3) \times (10 - 1) + (3 + 1) = \\
= 10^3 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10 - 10^2 - 2 \times 10 - 3 + 3 + 1 = \\
= 10^3 + 10^2 + 10 + 1 = 1111
\end{gathered}
$$

Lasciamo le rimanenti verifiche per esercizio.

① Sempre tenuto conto della notazione posizionale possiamo calcolare facilmente i quadrati dei numeri che terminano per 5. Per esempio

$$15^2 = (10 + 5)^2 = (10 + 5) \times (10 + 5) =$$
$$= 10^2 + 5 \times 10 + 10 \times 5 + 25 =$$
$$= 10^2 + 10 \times 10 + 25 = 2 \times 10^2 + 25 = 225$$
$$25^2 = (20 + 5)^2 = (20 + 5) \times (20 + 5) =$$
$$= 4 \times 10^2 + 5 \times 20 + 20 \times 5 + 25 =$$
$$= 4 \times 10^2 + 2 \times 10^2 + 25 = 6 \times 10^2 + 25 = 625$$

Avremo anche $35^2 = 1225$; $45^2 = 2025$, $55^2 = 3025$ e così via. Non è difficile osservare che tutti i numeri finiscono per 25, mentre le prime cifre si possono scrivere nel modo seguente:

$$2 = 1 \times 2,\ 6 = 2 \times 3,\ 12 = 3 \times 4,\ 20 = 4 \times 5,\ 30 = 5 \times 6.$$

Lasciamo enunciare la regola generale per esercizio.

① Anche il prodotto di un numero per 11 si può trovare velocemente.

Per esempio $234 \times 11 = 234 \times 10 + 234$. Ma

$$\begin{array}{rl} 2\,340 & + \\ \underline{234} & = \\ 2\,574 & \end{array}$$

Osserviamo che il prodotto ha la cifra delle unità uguale a quella di 234, mentre le altre cifre si ottengono sommando (con eventuale riporto) ciascuna cifra del numero, partendo dall'ultima, con quella precedente.

Allo stesso modo 568×11 è il numero che ha come cifre, partendo da destra:

- 8; $8 + 6 = 14$ quindi 4 con riporto di 1;
- $6 + 5 + 1 = 12$, quindi 2 con riporto di 1; $5 + 1$.
- Infine $568 \times 11 = 6248$.

② Consideriamo il seguente quesito assegnato all' **AHSME 1975**.

Determinare la somma delle cifre del numero $\left(10^{408}+1\right)^2$

Apparentemente il quesito è molto laborioso, neanche le calcolatrici scientifiche possono aiutarci. Usiamo allora la più potente delle calcolatrici a nostra disposizione: il cervello. Cominciamo a sviluppare il quadrato, senza usare la regola detta del quadrato di binomio, poiché qualcuno potrebbe non conoscerla o non ricordarla. Ricordiamo invece che moltiplicando due potenze che hanno la stessa base otteniamo una potenza con la stessa base e con esponente la somma degli esponenti.
Abbiamo allora:

$$\begin{aligned}&\left(10^{408}+1\right)^2=\left(10^{408}+1\right)\times\left(10^{408}+1\right)=\\&=10^{408+408}+10^{408}+10^{408}+1= \qquad .\\&=10^{816}+2\times10^{408}+1\end{aligned}$$

Adesso chiediamoci che tipo di numero è il risultato.
10^{816} è formato da 1 e 816 zeri, allo stesso modo $2\cdot10^{408}$ è formato da 2 seguito da 408 zeri. Quando sommiamo questi due numeri avremo ancora un numero con 817 cifre, che sono 1 (la prima), 2 (quella di posto 409 dalla fine) e poi tutti zeri. Sommando a questo numero 1 otterremo

$$1\underbrace{0\ldots0}_{407}2\underbrace{0\ldots0}_{407}1$$

la somma delle sue cifre è chiaramente 1 + 2 + 1 = 4.

② Possiamo operare anche con basi diverse, cioè usare meno o più di 10 simboli.
Si pensa che probabilmente la nostra base è 10 perché abbiamo dieci dita nelle due mani. Se contassimo su una sola mano, avremmo solo 5 simboli, che continuiamo a indicare con 0, 1, 2, 3, 4.
Ciò significa che la seconda cifra, quella che di solito chiamiamo delle *decine*, adesso sarà delle *cinquine*, e scatterà ap-

punto quando avremo esaurito i numeri con una cifra, cioè per indicare quello che con dieci simboli scriviamo 5. Ossia, indicando con $[n]_5$ un numero scritto in base 5, avremo che $[10]_5 = [5]_{10}$. Quindi i numeri di due cifre andranno da $[10]_5 = [5]_{10}$ fino a $[44]_5 = [4 \times 5 + 4]_{10} = [24]_{10}$. La terza cifra perciò scatterà al numero che in base 10 scriveremo 5^2. Cioè

$$[100]_5 = [5^2]_{10} = [25]_{10}$$

e così via.
Vediamo un quesito che usa basi diverse da 10.

Un grossista di biscotti per cani ha a disposizione casse che possono contenere 4, 16, 64 *o* 256 *lattine. Sappiamo che*
- *quando deve fare una spedizione cerca di inviare il minor numero complessivo di casse;*
- *invia solo casse completamente piene;*
- *ieri ha inviato* 946 *fra casse e lattine singole.*

*Vogliamo sapere quante casse di ciascun tipo ha sped*ito.

Osserviamo che 1, 4, 16, 64, 256 sono le successive potenze di 4, da $4^0 = 1$ fino a $4^4 = 256$. Quindi il problema si risolve facilmente trasformando $[946]_{10}$ in base 4. Per far ciò dobbiamo scrivere 946 come somma di successive potenze di 4.
La più grande potenza di 4 contenuta in 946 è 256, ma quante volte vi è contenuta? Poiché

$$946 = 3 \times 256 + 178$$

vuol dire che il grossista ha riempito 3 casse da 256 e gli sono rimaste 178 lattine da sistemare. Passando alle casse da 64 abbiamo: $178 = 64 \times 2 + 50$
Quindi ancora due casse da 64. Le rimanenti 50 lattine andranno in tre casse da 16 con 2 lattine rimaste, poiché $50 = 3\times16 + 2$
Le due lattine rimaste non riempiranno una cassa da 4 e rimarranno sfuse.
In pratica ciò vuol dire che $946 = 3\times4^4 + 2\times4^3 + 3\times4^2 + 0\times4+2$

Cioè $[946]_{10} = [32302]_4$. Infine il grossista ha inviato 3 casse da 256 lattine, 2 da 64, 3 da 16 e 2 lattine sfuse.

③ Proprio usando basi diverse da quella consueta, possiamo effettuare *magie* matematiche. Consideriamo la seguente tabella compilata apparentemente a caso.

16	**8**	**4**	**2**	**1**
17	**9**	**5**	**3**	**3**
18	**10**	**6**	**6**	**5**
19	**11**	**7**	**7**	**7**
20	**12**	**12**	**10**	**9**
21	**13**	**13**	**11**	**11**
22	**14**	**14**	**14**	**13**
23	**15**	**15**	**15**	**15**
24	**24**	**20**	**18**	**17**
25	**25**	**21**	**19**	**19**
26	**26**	**22**	**22**	**21**
27	**27**	**23**	**23**	**23**
28	**28**	**28**	**26**	**25**
29	**29**	**29**	**27**	**27**
30	**30**	**30**	**30**	**29**
31	**31**	**31**	**31**	**31**

Si inviti una persona a pensare un numero intero compreso tra 1 e 31. Si facciano poi indicare le colonne della tabella in cui è presente il numero. Ciò basta a individuarlo. Infatti la tabella non è costruita a caso, ma in ogni colonna abbiamo un numero che nella numerazione binaria ha quella posizione.

Ci spieghiamo meglio. Supponiamo che il numero pensato sia 27, vediamo che esso è presente nella prima, nella seconda, nella quarta e nella quinta colonna. E ciò dipende dal fatto che

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2 + 1$$

e quindi si può scrivere $[11011]_2$. Quindi il mago dovrà semplicemente convertire questa sequenza in base 10.

③ Anche se l'uso di basi diverse dalla 10 è relativamente recente, almeno in modo cosciente, nell'antico Egitto si usava un metodo per moltiplicare due numeri interi che è riconducibile alla numerazione binaria. Ciò perché risulta più semplice moltiplicare per due, cioè raddoppiare un numero, che moltiplicarlo per un qualsiasi numero.
Se perciò, per esempio, doveva calcolarsi 37 × 41. Si scriveva

$$41 = 32 + 8 + 1 = 2^5 + 2^3 + 1$$

(ricordiamo che $[41]_{10} = [101001]_2$).
Allora

$$37 \times 41 = 37 \times 2^5 + 37 \times 2^3 + 37.$$

Quindi raddoppieremo 37 5 volte, poi tre volte e infine una volta, sommando i risultati.

$$37 \to 74 \to 148 \to 296 \to 592 \to 1184$$

Perciò

$$37 \times 41 = 1184 + 296 + 37 = 1517.$$

Si potrebbe obiettare che il procedimento è molto laborioso, ma ha il vantaggio di utilizzare solo somme e duplicazioni.

Attività

1. ◎ Provare con la stessa tecnica da noi mostrata le rimanenti proprietà delle identità di Lucas.
2. ◎ Trovare una serie di identità partendo da $9 \times 9 + 7 = 88$ e $98 \times 9 + 6 = 888$. Quanto fa $9876543 \times 9 + 1$?
3. ◎ **(B1996)** Tom si diverte con la sua enciclopedia dei giochi matematici. Questo libro è composto di 4 pagine di copertina non numerate e 256 pagine numerate nell´ordine da 1 a 256. Le pagine a sinistra portano un numero pari mentre quelle a destra hanno un numero dispari. Tom ha aperto a caso una pagina dell´enciclopedia. Calcola la somma delle sei cifre dei numeri di pagina che ha davanti. Questa somma è la più grande possibile. Qual è il numero della pagina a sinistra?
4. ◎ Calcolare 8749×11, utilizzando il procedimento dell'esempio.
5. ◎ **(B2000)** Il gioco di Giulia e Bernardo consiste nello scrivere un numero di più cifre. Il giocatore che comincia, scrive la prima cifra (necessariamente diversa da zero); successivamente e alternativamente, ogni giocatore scrive una cifra a destra di quella o di quelle già scritte. I giocatori devono però rispettare le seguenti regole: dopo un 9, si può scrivere qualsiasi numero; dopo un numero minore di 9, si deve scrivere un numero più grande; ogni cifra può apparire (nel numero finale) al più tre volte. Perde il giocatore che, per primo, non può scrivere alcun numero. Comincia Giulia. Quale numero deve scrivere per essere sicura di vincere, qualunque sia il gioco di Bernardo? (rispondere 0, se si pensa che una tale strategia vincente non esista)
6. ◎ **(AHSME 1979)** Trovare la somma delle cifre del più grande numero pari di tre cifre che non cambia se scambiamo fra loro le cifre delle unità e delle centinaia.

7. ① Sapendo che $1 \times 8 + 1 = 9$ e $12 \times 8 + 2 = 98$, trovare una serie di identità. Quanto fa $123456789 \times 8 + 9$?
8. ① Sapendo che $11^2 = 121$ e $111^2 = 12321$, trovare una serie di identità. Quanto fa 111111111^2?
9. ① **(AHSME 1961)** Nella terra di Mathesis i numeri sono scritti in una base *r*. Jones acquista un'automobile per 440 monete, pagando con una banconota da 1000 monete e ricevendo per resto 340 monete. Quanto vale *r*?
10. ① **(AHSME 1961)** Se $[52]_b$ è il doppio di $[25]_b$, allora b è?
11. ① **(AHSME 1976)** Quanti numeri interi maggiori di 10 e minori di 100, aumentano di 9 quando scambiamo fra loro le cifre?
12. ① **(B1997)** Si divide un numero di 2 cifre per la somma delle sue cifre. Ad esempio: $23 : (2 + 3) = 23 : 5 = 4{,}6$. Qual è il più piccolo quoziente ottenibile (se necessario arrotondare al millesimo)?
13. ① **(B1999)** Nel libro di 225 pagine che Matilde sta leggendo, la somma delle cifre dei numeri delle due prime pagine del secondo capitolo è 18. Curiosamente anche la somma delle cifre dei numeri delle due ultime pagine di questo capitolo è uguale a 18. Quante pagine ha il secondo capitolo del libro di Matilde?
14. ① **(B2000)** Per numerare le pagine di un grosso quaderno, Pietro ha dovuto scrivere un numero di cifre doppio rispetto al numero di pagine di questo quaderno. Quante pagine ha il quaderno di Pietro?
15. ① **(B2000)** Sulla calcolatrice di Mauro, dei tasti da 1 a 9, ne funzionano ormai solo tre. Mauro somma i sei numeri (di due cifre distinte) che può formare utilizzando soltanto questi tre tasti. Miracolo! La somma che compare utilizza ancora queste tre stesse cifre. Quale è questa somma?
16. ① **(B2007)** Quanti sono i numeri che, diminuiti della somma delle loro cifre, sono uguali a 2007?

17. ② Sapendo che $9^2 = 81$ e $99^2 = 9801$, trovare una serie di identità. Quanto fa 999999999^2?
18. ② Sapendo che

$$987654321 \times 9 = 8888888889$$
$$987654321 \times 18 = 17777777778$$

Trovare una serie di identità. Quanto fa 987654321×81?

19. ② Sapendo che

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 18 = 222222222.$$

Trovare una serie di identità. Quanto fa 12345679×81?

20. ② Sapendo che $7 \times 9 = 63$ e $77 \times 99 = 7623$. Trovare una serie di identità. Quanto fa $777777777 \times 999999999$?
21. ② Enunciare una regola per calcolare il quadrato di un numero che finisce per 5 e usarla per calcolare velocemente 35^2; 125^5; 1235^2.
22. ② Trovare un modo rapido per calcolare 34^2, 334^2, 3334^2.
23. ② Esprimere la legge per calcolare velocemente $3333\ldots34^2$, in cui vi sono *n* 3.
24. ② Trovare un modo rapido per calcolare 67^2, 667^2, 6667^2.
25. ② Esprimere la legge per calcolare velocemente $6666\ldots67^2$, in cui vi sono *n* 6.
26. ② Determinare la somma delle cifre delle seguenti espressioni: a) $\left(10^{215}+1\right)^2$; b) $\left(10^{512}+3\right)^2$; c) $\left(10^{1234}+2\right)^2$.
27. ② Dopo aver osservato che $1\,000\,001 = 10^6 + 1$, calcolare la sua seconda e terza potenza.
28. ② Calcolare la seconda potenza del numero 2000000002.
29. ② **(AHSME1957)** Da un numero N di due cifre sottraiamo il numero che si ottiene scambiando fra loro le cifre e così facendo otteniamo un cubo perfetto. Allora
A) N non può finire per 5 B) N può finire per qualsiasi cifra tranne che per 5 C) N non esiste D) Ci sono esattamente 7 numeri che verificano la proprietà E) Ci sono esattamente 10 numeri che verificano la proprietà

30. ② **(AHSME1987)** Un crittografo usa il seguente metodo per codificare i numeri naturali. Prima esprime il numero in base 5. Poi associa a ogni cifra così ottenuta uno dei seguenti simboli ordinati {V, W, X, Y, Z}, cioè a 0 associa V, a 1 W e così via, al 4 associa Z. In questo modo tre numeri consecutivi sono codificati come VYZ, VYX, VVW. Quale numero, in base 10, è codificato XYZ?
31. ② **(AHSME1993)** Il simbolo R_k indica un numero che in base 10, è formato da *k* cifre tutte uguali ad 1. Per esempio $R_3 = 111$, $R_5 = 11111$. Se dividiamo R_{24} per R_4 otteniamo un numero intero le cui cifre sono solo zero ed uno. Quanti sono gli zeri?
32. ② **(B1999)** Messer Tobia, che non è mai stato una spia, possiede un terreno rettangolare "quasi" quadrato: la sua lunghezza e la sua larghezza, che sono numeri interi espressi in metri, differiscono esattamente di 1 metro. L´area del terreno di Tobia, espresso in metri quadrati, è un numero di 4 cifre: la cifra delle migliaia e quella delle centinaia sono uguali; lo stesso dicasi per la cifra delle decine e quella delle unità. Qual è la larghezza del terreno di Tobia? Nota: il problema ammette tre soluzioni.
33. ② **(B1999)** L´intero più piccolo, la somma delle cui cifre è 1, è il numero 1. L´intero più piccolo, la somma delle cui cifre è 2, è il numero 2. L´intero più piccolo, la somma delle cui cifre è 3, è il numero 3. … L´intero più piccolo, la somma delle cui cifre è 10, è il numero 19. L´intero più piccolo, la somma delle cui cifre è 11, è il numero 29 etc. Se ripetiamo la procedura e scriviamo la successione dei numeri così ottenuti, otteniamo: 1,2,3,…19,29,… Qual è il numero più grande di questa successione, che risulti il quadrato di un numero intero? Rispondete 0 (zero) se pensate che questo numero non esista.
34. ② **(GAB2003)** Quante cifre ha il più grande numero primo palindromo con un numero pari di cifre? (Nota: un numero si dice palindromo se può essere letto indifferen-

temente da sinistra a destra o da destra a sinistra. Per esempio, 141 e 2552 sono palindromi, mentre 1231 no)

35. ② (**GAB2005**) Per ogni numero intero n compreso tra 10 e 99, estremi inclusi, si sommano il prodotto delle sue cifre e la somma delle sue cifre, ottenendo così un nuovo numero S(n). Per quanti n accade che S(n) = n?
36. ② **(B1999)** Il villaggio di Centanime conta 100 abitanti. Il più vecchio è nato nel 1900 e tutti gli abitanti sono nati in un anno diverso, ma tutti il 1 gennaio. Nel 1999 la somma delle quattro cifre dell´anno di nascita di Giulio, uno degli abitanti di Centanime, è uguale alla sua età. Quanti anni ha Giulio?
37. ② Sei persone (indicate con A, B, C, D, E, F) vanno ad attingere l'acqua da un serbatoio che contiene 45 litri d'acqua: A ha un bidone da 1 litro, B da 2 litri, C da 4, D da 8, E da 16 e F da 32. Vanno nell'ordine da F ad A e ciascuno o riempie completamente il proprio bidone o lo lascia vuoto. Chi non riesce a riempire il proprio bidone?
38. ② Dobbiamo dividere 11255 caramelle in confezioni che ne possono contenere rispettivamente, 6, 36, 216, 1296, 7776. Sapendo che ciascuna confezione si riempie del tutto e che si cerca di usare il minor numero di confezioni; vogliamo sapere
    a. quali confezioni rimangono vuote;
    b. quante confezioni da 1296 caramelle si riempiono;
    c. quante caramelle non riescono a sistemarsi in alcuna confezione.
39. ② Un negoziante di giocattoli confeziona le biglie in gruppi di 7. Di queste, 7 vengono poi messe in una confezione più grande e questo processo si ripete mettendo sette di queste confezioni in una busta ancora più grande. Non si usano buste se non vengono completamente riempite. Poiché abbiamo un totale di 104734 biglie, vogliamo sapere:
    a. quante biglie contiene la più grande busta utilizzata;

b. quante sono le buste più grandi usate;
c. quante sono le confezioni da 7 che non riescono a mettersi in alcuna busta.

40. ② In 4 sacchetti uguali ci sono delle monete. In ogni sacchetto tutte le monete hanno lo stesso peso. Le monete di un dato sacchetto pesano 10, 20 o 30 *g*. Prendiamo una moneta dal primo sacchetto, 3 dal secondo, 9 dal terzo e 27 dal quarto. Pesando queste 40 monete otteniamo 950 *g*. Determinare il peso di ciascuna moneta in ognuno dei sacchetti.
41. ③ La seguente regola permette di indovinare un numero di quattro cifre pensato da qualcuno. Essa è dovuta a Gaspard Bachet ed è presente nel suo libro *Problems plaisants et delectables qui se font par le nombres*, pubblicato nel 1612. Colui che ha pensato il numero deve effettuare le seguenti operazioni: pensare il numero come formato dalle sue 4 cifre, che per comodità indichiamo con a, b, c e d; raddoppiare a; aggiungere 5; moltiplicare per 5; aggiungere 10; aggiungere b; moltiplicare per 10; aggiungere c; moltiplicare per 10; aggiungere d; comunicare solo quest'ultimo risultato. Scoprire il trucco.
42. ③ Una persona pensa un numero di 4 cifre, $abcd$, e ci comunica il risultato finale delle seguenti operazioni: moltiplica a per 5, aggiunge 8, raddoppia, aggiunge b, moltiplica per 10, aggiunge 12, aggiunge c, raddoppia, aggiunge 6, moltiplica per 5, aggiunge d. Quale numero dobbiamo togliere al risultato comunicato per ottenere $abcd$?
43. ③ Con riferimento agli esercizi 13 e 15, possiamo dire che ogni numero del tipo $aaaa\ldots ab^2$, con a e b numeri interi consecutivi, $a < b$, verifica una proprietà analoga?
44. ③ Consideriamo le seguenti somme:
$$1 = 1^2,\ 1 + 3 = 4 = 2^2,\ 1 + 3 + 5 = 9 = 3^2.$$
Esprimere e dimostrare una proprietà generale. Quindi determinare velocemente $1 + 3 + \ldots + 73$.

45. ③ Se 1 + 3 + 5 + 7 + … + n = 2025, , quanto vale n? Si tenga conto del precedente esercizio.
46. ③ Consideriamo le seguenti somme:
$$1 = 1^3,\ 3 + 5 = 8 = 2^3,\ 7 + 9 + 11 = 27 = 3^3.$$
Esprimere una proprietà generale. Quindi determinare velocemente 381 + 383 + … + 419.
47. ③ Con riferimento al precedente esercizio, quanti addendi dispari consecutivi danno per somma 4096, e qual è il primo di essi?
48. ③ Trovare una serie di identità partendo da
$$1 \times 7 + 3 = 10,\ 14 \times 7 + 2 = 10^2,\ 142 \times 7 + 6 = 10^3.$$
Quale espressione ha per risultato 10^{10}?
49. ③ Determinare la somma delle cifre di $\left(10^n + 9\right)^2, n \in \mathbb{N}$.
50. ③ Sapendo che la somma delle cifre di $\left(10^n + m\right)^2 n, m \in \mathbb{N}$ è 18, determinare il più piccolo m.
51. ③ Quanto vale la somma delle cifre di $\left(10^{2n} + 10^n + 1\right)^2$?
52. ③ **(B1996)** Se calcolo 1 + 11 + 111 + 111 + 1111 + ... fino al numero composto da 96 cifre "1", quante cifre 1 appariranno nel risultato?
53. ③ **(B1997)** Il numero 20 è "scivoloso" perché 20 = 10 + 10 e 1/10 + 1/10 = 0,20, che si scrive come il numero 20, semplicemente preceduto da uno zero e da una virgola. Un numero scivoloso è un numero che si può scomporre in una somma di due interi a e b, non necessariamente uguali, tali che la somma degli inversi di a e di b si scriva (in base 10) con le cifre del numero di partenza, scritte nello stesso ordine e precedute da uno zero e da una virgola. Quanti altri numeri scivolosi ci sono? Trovarne due.
54. ③ Simuliamo la crescita di una popolazione nel seguente modo. In un'urna immettiamo 5 palline numerate da 0 a 4. Numeriamo i giorni delle settimane nel modo seguente: 0 = lunedì, 1 = martedì, ..., 6 = domenica. Ogni giorno estraiamo una pallina e moltiplichiamo il numero ottenuto

per 5^n, con n giorno della settimana. Ogni giorno sommiamo il valore ottenuto ai precedenti. Partendo da lunedì, domenica abbiamo ottenuto 66035 individui, vogliamo sapere:

a. in quanti giorni non abbiamo estratto 0;
b. in quali giorni abbiamo estratto 0;
c. quante volte abbiamo estratto 4;
d. la somma dei punteggi delle 7 palline estratte.

55. ③ Dei batteri vengono messi in una coltura batteriologica. Sperimentalmente si stabilisce che essi triplicano di numero ogni giorno. Un dato giorno vengono iniziate dieci colture con lo stesso numero iniziale di 1259 batteri. Per diversi motivi le colture vengono interrotte (in pratica non generano più batteri) alla fine di diversi giorni, ma in modo che uno stesso giorno non vengano interrotte mai più di due colture. Quando si interrompe l'ultima coltura si contano i batteri di tutte e dieci le prove e si trova che essi ammontano a 58626594. Relativamente alle colture sospese l'ultimo giorno vuol sapersi:

    a. quante erano;
    b. quanti batteri contenevano alla fine ciascuna;
    c. se vi sono stati dei giorni in cui non sono state interrotte colture.

56. ③ Spiegare perché per passare dalla base 2 alla base 4 può utilizzarsi il seguente procedimento più veloce: s*i raggruppano le cifre del numero a due a due a partire da destra e si sostituisce a ciascuna coppia il corrispondente valore decimale*. Esempio:
$$[1101101]_2 = [1(10)(11)(01)]_2 = [1231]_4 .$$
57. ③ Trovare una regola analoga a quella presentata nell'esercizio precedente, per passare da base 2 a base 8.
58. ③ Osserviamo che $[213132]_4$ ha 6 cifre, mentre lo stesso numero scritto in base 2 diviene $[100111011110]_2$ che ha

12 cifre. È sempre vero che se N in base 4 ha n cifre, in base 2 ne ha $2n$? Giustificare la risposta.

59. ③ Se un numero in base 16 ha 5 cifre è sempre vero che scritto in base 10 ha più di 5 cifre? Giustificare la risposta.

Le risposte commentate si trovano a partire da pagina 87.

Il calcolo veloce

Prima dell'avvento delle calcolatrici tascabili, tutti i calcoli venivano fatti manualmente con grande dispendio di tempo o con l'ausilio delle noiose tavole di ogni genere: logaritmiche, trigonometriche, finanziarie, demografiche.
La diffusione delle calcolatrici tascabili da un lato ha consentito lo svolgimento di calcoli complessi in modo molto rapido, dall'altro ha prodotto negli studenti e non solo una forte dipendenza da essi con la conseguenza che la maggior parte sconoscono la tabellina pitagorica, non sanno eseguire le operazioni più elementari, usano in modo inadeguato ed incompleto questo strumento utile e talvolta indispensabile .
Dai libri di testo di matematica è scomparsa anche quella parte che si occupava di stenaritmia, che etimologicamente significa aritmetica veloce, dove venivano esposti metodi pratici per l'esecuzione mentale e veloce di alcune operazioni.
Verranno esposte alcune di queste tecniche, che possono essere utili in circostanze in cui non si ha a disposizione una calcolatrice e risultano per la soluzione di taluni problemi di matematica ricreativa .

◎ Divisione per 0,5
Poiché 0,5 × 2 = 1, per dividere un numero per 0,5 basta moltiplicarlo per 2

$$\frac{13}{0,5} = \frac{13 \times 2}{0,5 \times 2} = \frac{26}{1} = 26$$

$$\frac{147}{0,5} = 147 \times 2 = 294$$

◎ Divisione per 0,25
Poiché 0,25 × 4 = 1, per dividere un numero per 0,25 basta moltiplicarlo per 4

$$\frac{18}{0,25}=\frac{18\times4}{0,25\times4}=\frac{72}{1}=72$$

$$\frac{236}{0,25}=236\times4=944$$

⓪ Divisione per 0,125

Poiché 0,125 × 8 = 1, per dividere un numero per 0,125 basta moltiplicarlo per 8

$$\frac{27}{0,125}=\frac{27\times8}{0,125\times8}=\frac{216}{1}=216$$

$$\frac{312}{0,125}=312\times8=2496$$

⓪ Ci sono anche problemi che possono svolgersi senza troppi conti, ma con semplici ragionamenti. Vediamo il seguente quesito assegnato alla semifinale italiana dei giochi della Bocconi nel 1996. *Un acquario riempito d´acqua a filo del bordo pesa* 108 *kg. Quando è per metà vuoto, lo stesso acquario pesa* 57 *kg. Quanto pesa questo acquario vuoto?*

Il peso dell'acquario pieno è dato dall'acqua e dall'acquario. Quindi la differenza (108 – 57) kg = 51 Kg è il peso di metà dell'acqua. Pertanto tutta l'acqua peserà 51 kg × 2 = 102 Kg. Infine l'acquario vuoto pesa (108 – 102) kg = 6 Kg.

① Vediamo un problema dovuto al grande matematico svizzero del XVIII secolo, Leonhard Eulero.

Un padre lascia quattro figli che dividono le sue sostanze in parti uguali nel modo seguente: A prende metà del totale meno 3000 *denari. B prende un terzo meno* 1000 *denari. C prende un quarto. D prende un quinto e* 600 *denari. Quanti denari costituivano l'intero patrimonio e quanto prese ciascuno dei figli?*

Poiché le parti sono uguali sappiamo che, chiamando con *p* l'intero patrimonio,

$$\frac{1}{5}p + 600 = \frac{1}{4}p$$

cioè

$$\frac{1}{4}p - \frac{1}{5}p = 600 \Rightarrow \frac{5p-4p}{20} = 600 \Rightarrow \frac{1}{20}p = 600$$

Dato che 1/20 del patrimonio è 600 denari, vuol dire che tutto il patrimonio è 20 × 600 = 12000 denari. Osserviamo che le precedenti informazioni non servono e potevano essere usate da sole. Potevamo cioè anche scrivere che:

$$\frac{1}{2}p - 3000 = \frac{1}{3}p - 1000 \Rightarrow \frac{1}{2}p - \frac{1}{3}p = 2000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3p-2p}{6} = 2000 \Rightarrow \frac{1}{6}p = 2000 \Rightarrow p = 12000$$

① Vediamo ancora un esempio.

Uno spettacolo teatrale è stato così noioso che dopo alcuni minuti metà del pubblico è andato via, dopo altri cinque minuti un terzo dei rimanenti si è alzato, ancora 10 *minuti e un quarto degli spettatori si è allontanato lasciando solo* 9 *spettatori. Quanti erano gli spettatori all'apertura del sipario?*

In questo caso conviene partire dal risultato. Se sono rimasti 9 spettatori dopo che un quarto se ne era andato, vuol dire che i 9 rimasti erano i tre quarti di quanti ve ne erano prima, cioè prima di andare via avevamo

$$\cancel{9}_3 \times \frac{4}{\cancel{3}_1} = 12\,.$$

Ma questi 12 sono rimasti dopo che un terzo era andato via, cioè erano i 2/3. Pertanto gli spettatori erano

$$\cancel{12}_6 \times \frac{3}{\cancel{2}_1} = 18$$

A loro volta questi 18 erano la metà del pubblico iniziale, che era perciò formato da 36 persone.

① Ci sono poi particolari prodotti fra due numeri che differiscono della stessa quantità. Per esempio

$$21 \times 19 = (20 + 1) \times (20 - 1) = 20^2 - 1 = 400 - 1 = 399$$

In questo caso quindi basta innalzare al quadrato e sottrarre.

① Possiamo cercare anche di individuare la radice quadrata di un numero.

Premettiamo che

$$0 \times 0 = 0,\ 1 \times 1 = 1,\ 2 \times 2 = 4,\ 3 \times 3 = 9,\ 4 \times 4 = 16,$$
$$5 \times 5 = 25,\ 6 \times 6 = 36,\ 7 \times 7 = 49,\ 8 \times 8 = 64,\ 9 \times 9 = 81$$

quindi

i numeri che terminano per 2, 3, 7, 8 non possono essere quadrati perfetti;

i numeri che terminano per 1 possono essere quadrati di numeri che terminano per 1 o per 9;

i numeri che terminano per 4 possono essere quadrati di numeri che terminano per 2 o per 8;

i numeri che terminano per 6 possono essere quadrati di numeri che terminano per 4 o per 6;

solo i numeri che terminano per 25 possono essere quadrati di numeri che terminano per 5

Allora per individuare la radice quadrata di un numero è sufficiente confrontarlo con i due numeri che terminano per 5 o per 0, che lo comprendono la cui sequenza è

$$10^2,\ 15^2,\ 20^2,\ 25^2,\ 30^2,\ 35^2,\ 40^2,\ 45^2,$$
$$50^2,\ 55^2,\ 60^2,\ 65^2,\ 70^2,\ 75^2,\ 80^2$$
$$100,\ 225,\ 400,\ 625,\ 900,\ 1225,\ 1600,\ 2025,$$
$$2500,\ 3025,\ 3600,\ 4225,\ 4900,\ 5625,\ 6400$$

Calcoliamo $\sqrt{169}$. 169 è un numero compreso fra $10^2 = 100$ e $15^2 = 225$, quindi la sua radice quadrata, se è razionale, dovendo terminare per 3 o per 7, deve essere 13, come è.

$\sqrt{1296}$. 1296 è un numero compreso fra $35^2 = 1225$ e $40^2 = 1600$, quindi la sua radice quadrata, se è razionale, dovendo terminare per 4 o per 6, deve essere 36, come è.

$\sqrt{3249}$. 3249 è un numero compreso fra $55^2 = 3025$ e $60^2 = 3600$, quindi la sua radice quadrata, se è razionale, dovendo terminare per 3 o per 7, deve essere 57, come in effetti è.

Attività

1. ◎ Ci sono numeri interi il cui cubo ha come cifra delle unità la stessa del numero?
2. ◎ Possiamo escludere qualche cifra come cifra delle unità del cubo di un numero intero?
3. ◎ Calcolare velocemente 221 : 0,5; 123 : 0,25; 345 : 0,125.
4. ◎ Un coltello pesa quanto due cucchiai, tre cucchiai pesano quanto un coltello e una forchetta, un mestolo pesa quanto un coltello e un cucchiaio. Se una forchetta pesa 40 grammi, quanto pesano le altre posate?
5. ◎ Un pastore disse a un altro: "Se mi darai otto pecore avremo lo stesso numero di animali". Rispose l'altro: "Dammene tu otto e io ne avrò il doppio delle tue". Quante pecore aveva ciascuno dei due pastori?
6. ◎ **(AHSME 1978)** Quattro ragazzi comprano una barca per 60 euro. Il primo paga metà della somma pagata dagli altri ragazzi, il secondo paga un terzo della somma pagata dagli altri e il terzo paga un quarto della somma pagata dagli altri. Quanto paga il quarto ragazzo?
7. ◎ **(B1996)** L´ultimo CD dei Math–Singer costa un numero intero di franchi. Pur non avendo il portafoglio vuoto, Matteo non può acquistarlo poiché gli mancano 47 franchi. Anche Matilde non può comprarlo in quanto le mancano 2 franchi per pagarlo. Matilde e Matteo decidono allora di mettere in comune i loro franchi, ma anche in questo caso non hanno sufficienti franchi per comprarlo. Quanti franchi costa il CD dei Math–Singer?
8. ◎ **(B1997)** Tom colleziona farfalle. Tiene i suoi esemplari in undici scatole. Ciascuna delle 11 scatole contiene almeno una farfalla. 8 di queste 11 scatole ne contengono ciascuna almeno 2, 6 ne contengono ciascuna almeno 4 e due ne contengono esattamente 5 ciascuna. Di quante farfalle, come minimo, si compone la collezione di Tom?

9. ◎ **(B1996)** Nella lista dei numeri seguenti

6	7	29	4	13	5	2	8	9

eliminate due numeri la cui somma è 12 e la cui differenza vale 2. Poi, eliminate due numeri la cui somma vale 12 e il cui prodotto vale 32. In seguito, eliminate due numeri la cui differenza vale 7 e il cui prodotto vale 78. Infine, eliminate due numeri tali che, quando si divide l´uno per l´altro, il quoziente vale 3 ed il resto 2. Quale numero rimane?

10. ◎ Un ragazzo va al cinema e, fra il prezzo del biglietto, gelati e altri dolci che compra, spende un terzo dei soldi che ha con sé; tornando a casa non si accorge di avere un buco in tasca e perde i due terzi del denaro che gli era rimasto. Alla fine si accorge di avere solo 12 euro; quanti soldi aveva con sé?

11. ◎ **(B1999)** La Signora e il Signor Settimi hanno 7 figli nati tutti, stranamente, il 7 luglio. Ogni anno, per il loro compleanno la signora Settimi offre ad ogni figlio una torta con tante candeline quanti sono i suoi anni. Giovanni Settimi, il più giovane, si ricorda che 5 anni fa le candeline erano, in totale, la metà di quelle di quest´anno. Quante candeline saranno accese quest´anno?

12. ◎ **(B2000)** In un dado "normale", la somma dei punti su due facce opposte è sempre uguale a 7. Enrico ha messo su un tavolo tre dadi "normali", uno sopra l´altro a formare una torre. Sulla faccia superiore del dado in cima alla torre c´è un 4. Quanto vale la somma dei punti nelle cinque facce nascoste (comprese tra due dadi o il tavolo)?

13. ◎ **(B2000)** Ennio non ha voluto darmi il codice postale della sua città. Ecco come ha risposto alle mie domande in proposito:
    - Come ogni codice postale italiano, esso è composto da cinque cifre.
    - La somma della prima cifra con la seconda è 17.

- La somma della seconda con la terza è 15, come anche la somma della terza con la quarta.
- La somma delle ultime due cifre è 9.
- La somma dell´ultima con la prima è 8.

Qual è il numero di codice postale della città di Ennio?

14. ① **(A1998)** Tre viaggiatori si incontrano ad un incrocio. Uno di loro ha 3 fette di pane, un altro ne ha 5, il terzo non ha cibo con se. Decidono di dividere in parti uguali tutto il pane, il terzo però paga 8 monete per il pane che riceve. Come dovrebbero dividersi questa somma, i due che avevano il pane?
15. ① Marco ha comprato alcune caramelle, una la ha mangiata subito, metà delle rimanenti le ha messe in tasca e le rimanenti le ha nascoste. Suo fratello Luca le ha trovate, e ha ripetuto ciò che aveva fatto Marco, ne ha mangiata una e ne ha prese metà delle rimanenti. Lo stesso ha poi fatto il terzo fratello Matteo. Quando l'ultimo fratello, Giovanni, ha trovato le caramelle ne erano rimaste solo 7, che egli ha preso tutte. Quante erano le caramello inizialmente?
16. ① **(B1996)** Le 3 coppie Angelo e Chiara, Enrico e Simonetta, Guido e Marina totalizzano in sei 137 anni. Enrico e sua moglie hanno 47 anni in due; Chiara è la più anziana delle tre signore ed ha 4 anni in più della più giovane, mentre ogni marito ha 5 anni più della rispettiva moglie. Qual è l´età dei tre mariti?
17. ① Un avaro disse ad un ingenuo: “*Ti farò arricchire rapidamente. Fammi vedere quanto denaro hai in tasca, poiché io te ne darò altrettanto ma poi tu dovrai darmi €* 16,00. *Continueremo in questo modo quante volte vorrai*”. L'ingenuo accettò e accecato dalla prospettiva di arricchire facilmente e dall'illusione di vedersi raddoppiare ogni volta quanto aveva in tasca, non si accorse che dopo avere raddoppiato per quattro volte il denaro che aveva in tasca, gli rimasero solo € 16,00 che dovette perciò dare all'avaro,

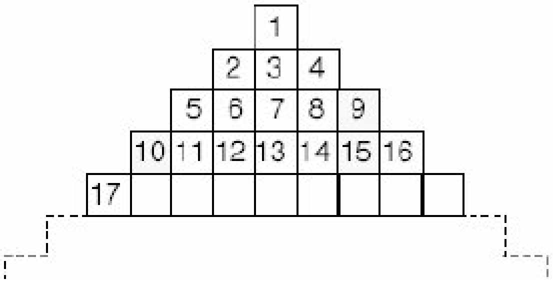
rimanendo senza soldi. Quanto denaro aveva in tasca prima di iniziare?

18. ① Un problema adattato da Eulero. Tre ragazzi Aldo, Giovanni e Giacomo giocano a biglie tre partite; poiché la posta è in palline, chi vince raddoppia il numero di quelle che già possiede. In ogni partita, uno dei tre giocatori a turno, secondo l'ordine alfabetico dei nomi, perde e gli altri due vincono, così alla fine, tutti e tre hanno 24 palline. Si vuol sapere quante ne aveva ciascuno prima di iniziare a giocare.
19. ① Se un numero diviso per 0,5 finisce per zero, quanto vale la cifra delle unità del numero?
20. ① Calcolare 31 × 29; 22 × 18; 14 × 16; 44 × 46; 23 × 27, con il metodo descritto nel testo i prodotti:.
21. ② Sapendo che i seguenti sono quadrati perfetti, calcolare velocemente le loro radici quadrate: 1369; 5329; 8836.
22. ② **(A1998)** Nella moltiplicazione 9 × ONE = NINE, differenti lettere indicano cifre diverse. Che numero è NINE?
23. ② **(A1998)** Scriviamo il seguente numero decimale infinito:

    0,14916253649…

    in cui scriviamo i quadrati perfetti uno accanto all'altro. Quale sarà la centesima cifra dopo la virgola?
24. ② **(B2003)** Leone è velocissimo nei calcoli e chiede a Paolo: "Qual è l'ultima cifra di 2003^{2003} ?" Aiuta Paolo.
25. ③ **(B2007**) Abbiamo messo tutti i numeri degli anni della nostra era in uno schema triangolare:
    - una riga è individuata dal primo numero della riga stessa, partendo da sinistra;
    - una colonna è individuata dal primo numero della colonna stessa, partendo dall'alto;
    - un numero dello schema è dunque individuato da due "coordinate": il numero della riga e quello della colonna in cui si trova. Ad esempio, 15 ha "coordinate" (10;9).

    Trovate nello schema le coordinate dell'anno 2007.



26. ③ Un problema tratto da *Problemes plaisants et delectables qui se font par le nombres*, di G. Bachet. «Su un tavolo vi sono 18 monete. Tre persone, A, B e C, hanno rispettivamente 1, 2 e 3 monete. Poi si effettua un sorteggio fra i tre; il primo estratto riceve tante monete quante ne aveva, il secondo il doppio e il terzo il quadruplo. Determinare l'ordine di estrazione dei tre nominativi se sono rimaste
    a) 5 monete;
    b) 2 monete;
    c) 4 monete. Studiare tutte le possibilità del problema».

Le risposte commentate si trovano a partire da pagina 100.

I divisori dei numeri interi

L'operazione di moltiplicazione fra due numeri naturali ha per risultato un solo numero naturale, che si chiama prodotto dei due numeri. Il processo inverso, di determinare almeno due numeri naturali il cui prodotto sia un numero dato è, come tutti i processi inversi, più complicato. Diciamo che ci sono sempre due numeri il cui prodotto è un certo numero n, che sono 1 e lo stesso n, ma ovviamente questo caso è troppo banale per interessare. Quando è possibile invece si vogliono trovare due numeri entrambi diversi da n il cui prodotto sia n.
Se $n = a \times b$, diciamo che n è un *multiplo* sia del numero a come del numero b, mentre a e b si dicono *divisori* di n. Si dice anche che n è divisibile sia per a che per b e che a b dividono entrambi n.
Per esempio $12 = 1 \times 12$, ma anche $12 = 2 \times 6$ e $12 = 3 \times 4$. Non consideriamo i prodotti con i fattori cambiati di ordine. Possiamo perciò dire che 12 ammette i seguenti divisori: 1, 2, 3, 4, 6, 12. È facile vedere che non ha altri divisori.
Invece per esempio $11 = 1 \times 11$ e non ci sono altre possibilità. Questi numeri che hanno solo due divisori sono particolarmente importanti, perché rientrano sempre fra i divisori di qualsiasi altro numero.
Un numero che ha solo due divisori distinti viene detto numero *primo*.
L'importanza di tali numeri è affermata dal cosiddetto *Teorema fondamentale dell'aritmetica*, che recita: *Ogni numero intero può scomporsi in un sol modo come prodotto di potenze di fattori primi*.

◎ Per stabilire se un dato numero è o no divisibile per un altro numero, esistono dei criteri che ci limitiamo a riportare.

Criterio di divisibilità per 2. Un numero naturale m è divisibile per 2 se lo è la sua cifra delle unità.

Criterio di divisibilità per 4. Un numero naturale $m>9$, è divisibile per 4 se lo è il numero formato con le sue cifre della decina e delle unità.

Più in generale.

Criterio di divisibilità per 2^n. Un numero naturale $m>10^{n-1}$, è divisibile per 2^n se lo è il numero formato con le sue ultime n cifre.

Quindi il numero 12 345 678 è divisibile per 2 ma non per 4, perché 8 è divisibile per 2 ma 78 non è divisibile per 4. Il numero 12 348 840 è divisibile per 8, perché $840 = 8 \times 105$, ma non per 16, perché $8840 = 16 \times 552 + 8$.

Criterio di divisibilità per 3. Un numero naturale m è divisibile per 3 se lo è il numero formato sommando tutte le sue cifre.

Criterio di divisibilità per 9. Un numero naturale m è divisibile per 9 se lo è il numero formato sommando tutte le sue cifre.

Non vale una regola più generale per tutte le potenze di 3. Per esempio 54 è divisibile per 27, ma la somma delle cifre di 54, $5 + 4 = 9$, non è divisibile per 27.

La divisibilità per 5 è molto facile da ottenere poiché il prodotto di un numero pari per 5 ha come cifra delle unità lo zero, mentre il prodotto per un numero dispari ha come cifra delle unità il 5.

Criterio di divisibilità per 5. Un numero naturale *m* è divisibile per 5 se la sua cifra delle unità è 0 oppure 5.

Non vi è un semplice criterio per la divisibilità per 7

Criterio di divisibilità per 11. Un numero naturale *m* è divisibile per 11 se la differenza fra la somma delle sue cifre di posto dispari e la somma delle sue cifre di posto pari lo è.

Un'importantissima proprietà, molto utile negli esercizi è la seguente.

Se la somma di due numeri è divisibile per un certo numero n e uno dei due addendi è divisibile per n, anche l'altro addendo deve esserlo.

Così se consideriamo per esempio il numero 18 che è divisibile per 3, lo possiamo scrivere come somma di due numeri nessuno dei quali è divisibile per 3, per esempio 17 + 1; ma non possiamo mai scriverlo come somma di due numeri uno solo dei quali è divisibile per 3.
La proprietà ovviamente si può generalizzare a più addendi:

Se la somma di alcuni numeri è divisibile per un certo numero n e tutti gli addendi tranne uno sono divisibili per n, anche l'addendo rimanente deve esserlo.

◎ *Sommando 7 con un numero di due cifre, otteniamo un multiplo di 7, quale può essere l'altro numero?*
Da quanto visto in precedenza, anche l'addendo sconosciuto deve essere multiplo di 7, quindi può essere uno qualsiasi dei seguenti multipli di 7:

14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

Vediamo adesso un quesito assegnato alle semifinali italiane dei giochi della Bocconi del 1996.

① 6 *concorrenti che indossavano dei pettorali numerati da* 1 *a* 6 *hanno partecipato ad una corsa. I corridori con pettorali pari hanno ottenuto all´arrivo dei piazzamenti dispari. I concorrenti recanti dei numeri multipli di* 3 *si sono classificati a dei posti il cui numero non è divisibile per* 3. *Infine, i corridori recanti dei numeri superiori a* 3 *hanno conquistato le prime tre posizioni. Qual è l´ordine di arrivo?*
Indichiamo con i numeri romani la posizione che occupa ogni corridore, che indichiamo con il numero del suo pettorale. Dalle informazioni note sappiamo che ai primi tre posti ci sono i corridori con i numeri 4, 5 e 6. D'altro canto 6 in quanto multiplo di 3 non può essere né in III, né in VI posizione; e in quanto numero pari deve essere in posizione dispari. Pertanto 6 è in I posizione. Dato che 4 non può essere in II, deve essere in III, perciò 5 è in II. Passiamo agli altri tre concorrenti. 3 non può essere in VI, né in V, quindi è in IV. Perciò 1 deve essere in VI e 2 in V. Infine la classifica finale è

$$6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1$$

Proprio grazie ai divisori di un numero si possono impostare parecchi bei problemi, come questo, che è una variazione di un quesito proposto all'Università di Stanford negli Stati Uniti, dove si sono tenuti per molti anni delle famose gare matematiche.

① *Due amiche A e B si incontrano dopo tanto tempo. A chiede a B se ha figli e quanti anni hanno ciascuno di essi. B risponde dicendo che ha tre figli, i numeri che esprimono le loro età moltiplicati fra loro hanno un prodotto di* 36 *e la somma di tali numeri corrisponde al numero civico della porta davanti la quale sono ferme a parlare. A dice che, pur essendo brava in matematica, non riesce a determinare le tre età, allora B ag-*

giunge dicendo che il maggiore dei suoi figli ha gli occhi azzurri.
Quest'ultima affermazione sembrerebbe priva di senso, vedremo invece che è effettivamente importantissima. Infatti la prima informazione ci dice che i figli possono avere una delle seguenti tre terne di età:

$$(1, 1, 36), (1, 2, 18), (1, 2, 12), (1, 4, 9),$$
$$(2, 2, 9), (1, 6, 6), (2, 3, 6), (3, 3, 4).$$

Dato che esse sono le uniche terne il cui prodotto fornisce 36. Se le sommiamo otteniamo sempre risultati diversi, tranne nei casi

$$2 + 2 + 9 = 1 + 6 + 6 = 13.$$

Dato che A ha detto di non riuscire a determinare le età dei tre ragazzi esse devono essere ferme davanti ad una abitazione posta al numero 13. La terza informazione svela l'inghippo, dato che la mamma parla di un maggiore, i due gemelli che vi sono fra i tre figli non possono comprendere il primogenito, come accadrebbe nel caso (1, 6, 6). Quindi i bambini hanno 9, 2 e 2 anni.

① Consideriamo un quesito tratto dal testo di Beiler in bibliografia.
Su una vecchia fattura è scritto il prezzo $ *67, 9# *relativo a* 72 *tacchini, tutti dello stesso prezzo, i simboli indicano che la cifra è illeggibile. Possiamo stabilire l'esatto prezzo?*
Il numero da determinare deve essere evidentemente divisibile per 72, cioè per 8 e per 9. la divisibilità per 9 implica che la somma delle cifre sia divisibile per 9. Cioè * + 6 + 7 + 9 + # = 22 + * + # deve essere un multiplo di 9. Poiché * è una cifra non nulla (1, 2, …, 9), mentre # è una cifra qualsiasi (0, 1, …, 9), la somma possibile è compresa tra (22 + 1 + 0) = 23 e (22 + 9 + 9) = 40. I multipli di 9 sono 27 e 36. Quindi deve essere * + # = 5 oppure * + # = 18. Le soluzioni accettabili di queste due equazioni sono: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0), (9, 9). La divisibilità per 8 indica che le ultime 3 cifre devono essere

divisibili per 8, quindi la cifra finale deve essere pari, perciò i precedenti candidati si riducono solo a (1, 4) e (3, 2), con i possibili prezzi:

$ 167, 94 e $ 367, 92

Poiché solo 36792 è divisibile per 8, abbiamo che il prezzo corretto era $ 367, 92 e ogni tacchino costava $ 367, 92 : 72 = $ 5, 11.

② Consideriamo il seguente quesito assegnato ai Giochi di Archimede per il biennio del 2004.

a, b e c sono tre numeri naturali. Sappiamo che a è divisibile per 15*, b è divisibile per* 12 *e c è divisibile per* 21. *Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?*

A) $a^2 + b^2 + c^2$ *è divisibile per* 18 *B*) $a + b + c$ *è divisibile per* 9

C) $a + b + c$ *è divisibile per* 2 *D*) $(a + b + c)^2$ *è divisibile per* 9

E) $a^2 + b^2 + c^2$ *è divisibile per* 15

Dire che a è divisibile per 15 vuol dire che si ha: $a = 15m$, con m un numero naturale, le altre due affermazioni implicano che si ha: $b = 12n$ e $c = 21p$. Adesso possiamo scrivere:

$$
\begin{gathered}
a^2 + b^2 + c^2 = (15m)^2 + (12n)^2 + (21p)^2 = \\
= 9 \times 25m^2 + 9 \times 16n^2 + 9 \times 49p^2 = \\
= 9 \times (25m^2 + 16n^2 + 49p^2)
\end{gathered}
$$

che rappresenta un numero divisibile per 9, ma in generale non per 18, per esempio se $m = n = 1$, $p = 2$, il numero in parentesi, 237, è dispari e non divisibile per 5.

$$
\begin{gathered}
a + b + c = 15m + 12n + 21p = 3 \times 5m + 3 \times 4n + 3 \times 7p = \\
= 3 \times (5m + 4n + 7p)
\end{gathered}
$$

che è divisibile per 3, ma in generale non per 9, per esempio se $m = n = p = 1$, il numero in parentesi è 16, che non è divisibile per 3. Se poi $m = n = 1$, $p = 2$, il numero in parentesi è dispari, quindi $a + b + c$ non è divisibile per 2.

Quindi l'unica affermazione sempre vera è che $(a + b + c)^2$ è divisibile per 9.

② Il seguente quesito è stato assegnato ai Giochi di Archimede del biennio dell'anno 2005.
Il numero $(n + 2)\times(n + 3)\times(2n + 5)$, *comunque si prenda un numero naturale n, è divisibile per quale numero?*
$n + 2$ e $n + 3$ sono due numeri interi consecutivi, pertanto uno dei due è pari, perciò il numero è divisibile per 2. Se nessuno dei due numeri è divisibile per 3, vuol dire che $n + 4$ è divisibile per 3. quindi anche $2 \times (n + 4) = 2n + 8$ è divisibile per 3, quindi anche $2n+ 8 - 3 = 2n + 5$ è divisibile per 3. perciò il numero è certamente divisibile per 6.
Non è detto che sia divisibile per 9, 10 o 15 per esempio se $n = 1$, $(1 + 2) \times (1 + 3) \times (2 + 5) = 3 \times 4 \times 7$ non è divisibile né per 9, né per 10, né per 15.

② Ci sono certi numeri che, per la loro forma e grazie alla notazione posizionale producono risultati apparentemente magici. Per esempio il numero 101, moltiplicato per 37 ha come risultato 3737 e moltiplicato per 51 ha come risultato 5151. In effetti se eseguiamo il prodotto effettuando la proprietà distributiva, comprendiamo il perché dei risultati.
$101\times 37 = (100 + 1) \times 37 = 100 \times 37 + 37 = 3700 + 37 = 3737$.
Ma quanto visto accade solo se moltiplichiamo per numeri interi minori di 100. Infatti se il numero è maggiore di 100, per esempio 123, si ha:

$$101 \times 123 = 100 \times 123 + 123 = 12300 + 123 = 12423$$

Lo stesso accade con tutti i numeri del tipo 1000…001. Per esempio con 1001 per tutti i numeri minori di 1000.
Abbiamo così

$$1001 \times 75 = 1000 \times 75 + 75 = 75000 + 75 = 75075$$

$$1001 \times 347 = 1000 \times 347 + 347 = 347000 + 347 = 347347$$

Ma grazie ai divisori ciò accade anche per altri numeri, che sono fattori di questo. Per esempio, dato che 1001 = 7×11× 13, allora dato che

$$1001 \times 2 = 2002,\ 1001 \times 3 = 3003,\ \dots,\ 1001 \times 9 = 9009$$

Avremo anche

$$77\times(13\times2) = 2002,\ 77\times(13\times3) = 3003,\ \dots,\ 77\times(13\times9) = 9009$$

cioè

$$77\times13=1001,\ 77\times26=2002,\ 77\times39=3003,\ \dots,\ 77\times117=9009.$$

③ Vogliamo concludere l'argomento enunciando un importante concetto poco noto.

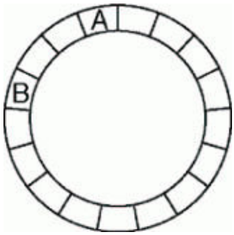
Teorema Dato un numero intero *N*, la cui fattorizzazione in primi è: $N = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times p_3^{a_3} \times \ldots \times p_h^{a_h}$, allora esso ha un numero di divisori pari a $(a_1 + 1)\times(a_2 + 1)\times(a_3 + 1)\times\ldots\times(a_h + 1)$.

Per esempio consideriamo il numero 12, i cui divisori sono i seguenti sei : (1, 2, 3, 4, 6, 12). Ora 12 = 2^2 × 3, quindi per il teorema dovrebbe avere (2 + 1) × (1 + 1) = 6 divisori, come effettivamente è.

Attività

1. ◎ **(GAB 2006)** Quanti divisori positivi ha $5 \times 4 \times 3 \times 2$? (Tra i divisori di un numero devono essere contati anche 1 e il numero stesso.
2. ◎ **(GAB 2006)** Quanti sono i multipli di 3 maggiori o uguali di 2000 e minori o uguali di 4000?
3. ◎ **(GAT 2006)** Laura sta leggendo un libro e nota che il numero della pagina a cui è arrivata è divisibile per 3, 4 e 5. Qual è la cifra delle unità del numero della pagina successiva?
4. ◎ **(B1996)** Sul bordo di uno stagno circolare sono piantati 5 magnifici salici sui cui rami si trovano dei passeri il cui numero totale è inferiore a 30. Ad un certo momento, un passero è passato dal primo al secondo salice. Due passeri sono in seguito passati dal secondo al terzo salice, poi tre dal terzo al quarto, quattro dal quarto al quinto ed infine cinque passeri si sono spostati dal quinto salice al primo. Dopo questi trasferimenti, vi era lo stesso numero di passeri su ciascuno dei cinque salici. Quanti sono i passeri posati su ciascuno dei cinque salici prima di tutti i trasferimenti?
5. ◎ **(B2000)** I miei quattro cugini arrivano a casa nostra domenica mattina all´ora della colazione e si fermano per dodici giorni di vacanza. Sono molto golosi, come noi del resto! Per fortuna la mamma, previdente, ha comperato 168 barrette di cioccolato in modo che ognuno possa durante i dodici giorni, mangiarne una a colazione e una a merenda. Purtroppo, alla sera del nono giorno, i nostri cugini devono interrompere il loro soggiorno e rientrare a casa. Noi continuiamo, malgrado la loro assenza, a gustarci le barrette di cioccolato con la stessa frequenza. In quale giorno della settimana mangeremo l´ultima barretta?
6. ◎ **(B2002)** Ad ogni secondo, la pulce A si sposta di 3 caselle in senso orario mentre la pulce B si sposta di 2 casel-

le in senso contrario. Dopo quanti secondi le due pulci si poseranno per la prima volta contemporaneamente sulla stessa casella?



7. ◎ **(B2008)** Jacob, in vacanza al mare, si dedica al suo hobby preferito: la pesca. Il primo giorno pesca 1 pesce; il secondo giorno, 2 pesci; il terzo giorno, 3 pesci. Nei giorni successivi pesca 4 pesci al giorno fino al terzultimo giorno della sua vacanza, quando Jacob pesca soltanto 3 pesci. Il penultimo giorno, 2; l'ultimo giorno, solo 1. Durante l'intera vacanza,Jacob ha pescato in tutto 52 pesci. Quanti giorni è durata la vacanza al mare di Jacob?
8. ◎ **(B2007)** Una scatola contiene delle caramelle gialle (al limone) e delle caramelle verdi (alla menta). Se aggiungessimo una caramella gialla, le caramelle gialle rappresenterebbero un quarto del contenuto della scatola mentre, se ne togliessimo una, sarebbero solo il quinto del contenuto della scatola. Quante caramelle verdi contiene la scatola ?
9. ◎ **(B2008)** Matteo e Rossella sono entrambi golosi e si contendono i cioccolatini che hanno. Matteo conta i suoi. ”Se ne avessi il triplo, ne avrei più di 31 – dice a Rossella – ma, se ne avessi il doppio, ne avrei meno di 31!”. Prende allora un cioccolatino di Rossella e confessa : “anche adesso, se ne avessi il doppio, ne avrei sempre meno di 31!”.A questo punto, è Rossella a prendere 4 cioccolatini a Matteo – le piacciono troppo ! – dicendogli poi : “ non ti lamentare! Anche adesso, se tu avessi il triplo dei cioccolatini che hai, ne avresti più di 31!” Quanti cioccolatini aveva Matteo prima di questa accanita discussione?

10. ⓪ **(AHSME1967)** La somma $2a3 + 326$, fornisce il numero $5b9$, che è divisibile per 9. quant'è $a + b$?
11. ⓪ **(AHSME1974)** Gli interi maggiori di uno sono sistemati in cinque colonne come mostrato

I	**II**	**III**	**IV**	**V**
	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	

Se continuiamo a scrivere i numeri con le stesse regole finora applicate, in che colonna scriveremo 1000?

12. ⓪ **(AHSME1985**) In un certo anno Gennaio ha esattamente 4 Martedì e 4 Sabato. Che giorno della settimana è il primo Gennaio?
13. ① **(AHSME1951)** Formiamo un numero di sei cifre ripetendo un numero di tre cifre, per esempio 256256 oppure 678678. Qual è il più grande numero per cui ogni numero di questa forma è divisibile?
14. ① **(AHSME1951)** Quanti interi positivi minori di 50 hanno un numero dispari di divisori?
15. ① **(A1998)** Trova il più piccolo numero intero che non contiene la cifra 9, ma è divisibile per 999.
16. ① **(A1998)** "Quante persone abitano in questa casa?" chiese un poliziotto. "Tre", fu la risposta. "Quanti anni hanno?", "Il prodotto delle loro età è 225, e la somma è uguale al numero civico di questa casa". Il poliziotto guardò e disse: "Sei il più vecchio dei tre?", "Sì", fu la risposta. "Mi basta!", disse il poliziotto. Quanti anni hanno gli abitanti della casa?
17. ① **(B2002)** Enrico, per imparare le tabelline, si diverte a costruire una tavola di moltiplicazioni. Ritrovate i numeri della prima riga

×	2					
	6					

12						60
			50			
6					42	
		99	110			
				8	56	

18. ① **(B2002)** I mille–piedi adulti impiegano un secondo per togliersi una scarpa, mentre i loro figli ci mettono due secondi. Una famiglia di mille–piedi è composta da padre, madre e tre figli. I genitori, quando sono scalzi, possono aiutare i loro figli. Ogni mille–piedi può togliere solo una scarpa per volta, a se stesso o ad un figlio (che intanto continua le sue operazioni). Quanto tempo ci metterà la nostra famiglia di mille–piedi, al minimo, per togliersi tutte le scarpe? Nota: si suppone che ogni mille–piedi abbia effettivamente … 1000 zampette! Nota: il tempo deve essere dato in secondi ed eventualmente essere arrotondato per eccesso.
19. ① **(B2003)** Quali sono i due numeri interi consecutivi più piccoli che abbiano, come somma delle cifre con cui sono scritti, dei numeri entrambi divisibili per 7?
20. ① **(B2008)** Renato ha scritto un numero di due cifre. Scrive poi un 2 a destra della seconda cifra, ottenendo così un numero a tre cifre. Il nuovo numero vale 335 in più del numero iniziale (di 2 cifre). Qual era il numero di due cifre?
21. ① Determinare i valori della cifra x in modo che $123x456$ sia divisibile per 3.
22. ① Determinare i valori della cifra x in modo che $23456x78$ sia divisibile per 8.
23. ① **(GAB2005)** La nonna Lucia ha portato un cestino con 120 ciliege ai suoi tre nipoti, Jacopo di 4 anni, Martino di 7 anni e Duccio di 9 anni. La nonna distribuisce tutte le ciliegie ai nipoti secondo questo criterio: dà a ciascun nipote un numero di ciliege ottenuto moltiplicando l’età del nipo-

te per un certo fattore, e questo fattore è lo stesso per tutti e tre i nipoti. Quante ciliege vengono date a Jacopo?

24. ① **(GAB2007)** Allo stadio gli spettatori entrano attraverso cinque cancelli, posti uno di fianco all'altro, secondo questa regola: viene fatta entrare una persona dal primo cancello, poi due persone dal secondo cancello, poi tre persone dal terzo, poi quattro persone dal quarto e infine cinque persone dal quinto. Poi si ricomincia procedendo allo stesso modo e si va avanti finché non sono entrati tutti. Sapendo che Raffaele sarà la 2007–esima persona ad entrare, da quale cancello entrerà?
25. ① **(GAB2007)** Sul pianeta Uru le settimane durano 8 giorni, i mesi (tutti indistintamente) durano 34 giorni e in un anno ci sono 14 mesi. Quando il primo giorno dell'anno cade di domenica (ultimo giorno della settimana) si celebra la Festa del Pianeta. Sapendo che oggi su Uru è la Festa del Pianeta, tra quanti giorni sarà la prossima?
26. ① **(GAB2008)** Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 Euro. Con grande generosità però, gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 Euro. Quanti sono gli amici di Pietro e Paolo?
27. ① **(GAB2008)** Alberto, Barbara e Clara giocano in un grande piazzale dove ci sono 2008 birilli. Alberto butta giù il triplo dei birilli buttati giù da Barbara, che a sua volta butta giù il doppio dei birilli buttati giù da Clara. Quanti birilli al massimo può aver buttato giù Alberto?
28. ① **(GAB2008)** Quanti sono i numeri interi positivi multipli di almeno uno tra 5 e 7 e minori o uguali a 1000?
29. ① Osserviamo che

$143 \times 7 = 1001$, $143 \times 14 = 2002$, $143 \times 21 = 3003$, $143 \times 28 = 4004$.

Senza effettuare i calcoli, quanto fa 143×63?

30. ① Con riferimento al problema precedente trovare una regola generale. Cioè se $143 \times n = abba$, con a e b cifre generiche, che tipo di numero deve essere n?
31. ① Sempre con riferimento al problema precedente, può accadere che si abbia $143 \times n = abcabc$?
32. ① Se $143 \times n = 123123$, quanto fa n?
33. ② Tenuto conto che $10001 = 73 \times 137$, determinare dei prodotti *magici*.
34. ② Determinare i valori delle cifre x e y in modo che $81y1058294x$ sia divisibile per 33.
35. ② **(A1998)** Il numero 19981998 può essere prodotto di tre numeri interi consecutivi? Può essere somma di tre numeri interi consecutivi?
36. ② **(A2002)** Un numero intero ha esattamente 8 divisori, fra i quali ci sono 35 e 77. trovare il numero.
37. ② **(GAB2005)** Quanti sono i numeri interi maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 100 che sono uguali al quadrato del numero dei propri divisori positivi? (Attenzione: tra i divisori di un numero vi sono anche 1 ed il numero stesso).
38. ② **(GAB2003)** Quanti sono i numeri interi positivi n per i quali $8n + 50$ è un multiplo di $2n + 1$?
39. ② **(GAT2004)** Un intero si dice *parofilo* se l'espressione decimale di ogni suo multiplo termina con almeno due cifre pari. Determinare quale dei seguenti numeri è parofilo.
    A) 2004 B) 2116 C) 2122 D) 2740 E) 2942
40. ② **(B2003)** Ad un concorso di Matematica le ragazze erano il doppio dei maschi. Ognuno dei partecipanti ha ottenuto 8, 9 o 10 punti e tutti insieme hanno totalizzato 156 punti. Quanti ragazzi (maschi) hanno partecipato al concorso?

41. ③ Determinare la regola per indovinare un numero pensato minore di 60: dividere per 3, poi per 4 e infine per 5 e comunicare i tre resti, a, b e c.
42. ③ Con riferimento al precedente esercizio, se comunichiamo 2, 3 e 4, che numero abbiamo pensato?
43. ③ Dimostrare che un numero che è potenza di un numero primo, $N = p^h$, ha $h + 1$ divisori.
44. ③ **(A2003)** Un insegnante scrive un numero sulla lavagna. Uno studente dice: "Il numero è divisibile per 31". Un altro dice: "Il numero è divisibile per 30". Ancora un altro "Il numero è divisibile per 29". E così via, ognuno dicendo la stessa frase con un numero in meno del precedente, finché il trentesimo studente dice: "Il numero è divisibile per 2". Alla fine l'insegnante dice che solo 2 delle 30 affermazioni sono sbagliate e sono state dette una dopo l'altra. Quali sono?

Le risposte commentate si trovano a partire da pagina 106.

Problemi indeterminati

② Uno degli argomenti per così dire "stabili" delle scuole secondarie superiori è quello delle equazioni algebriche in una incognita, quasi sempre solo di I e II grado, e dei problemi che con esse possono risolversi. In particolare quando le incognite sono più di una si ricorre alla risoluzione di sistemi di equazioni che hanno tante incognite quante equazioni. La ricerca della soluzione unica viene vista come unico problema degno di essere affrontato. In effetti nei problemi per così dire pratici, la soluzione unica non esiste. Molti problemi hanno più di una soluzione, per cui il compito del risolutore è quello di andare a determinare la soluzione "migliore", dove il precedente aggettivo dipende dagli scopi che intendono perpetrarsi. Nel senso che può cercarsi la soluzione minima, o quella che verifica una data proprietà. In effetti nella storia delle matematiche, soprattutto in certi periodi, è stato profuso un notevole impegno anche nella risoluzione delle equazioni cosiddette indeterminate, che nel caso particolare in cui si cercano soluzioni intere o più in generale razionali, si chiamano anche equazioni diofanteee, in onore del matematico greco Diofanto di Alessandria, che le studiò in modo dettagliato.
Molti di questi problemi si trovano in opere indiane (per esempio il *Lilavati*(1) di Bhaskara scritto nel XII secolo, o il *Ganita–Sara–Sangraha* scritto da Mahaviracarya nel IX secolo). Vediamo come possiamo affrontare in modo rigoroso proble-

(1) A proposito di quest'opera vi è un curioso aneddoto, si dice che il suo autore l'abbia scritto per confortare una delle sue figlie. Infatti egli aveva molta fiducia nella numerologia, pertanto aveva programmato nei minimi particolari il matrimonio della figlia, non solo nella scelta dello sposo, ma anche del luogo e dell'ora. Purtroppo l'orologio ad acqua che doveva stabilire l'esatto momento del matrimonio, si inceppò. Quando ci si accorse del fatto era troppo tardi, le congiunzioni astrali che avrebbero garantito l'eterna felicità del matrimonio erano svanite, quindi svanì anche il matrimonio.

mi del genere. Iniziamo al solito da quelli più semplici, ossia equazioni indeterminate in due incognite.
Ecco un esempio di un problema enunciato e risolto, senza alcuna giustificazione, da Alcuino (York 735; Tours 19/05/804), nel suo testo del 775, *Propositiones ad acuendos juvenes*.

② *Si distribuiscono* 100 *covoni di grano fra* 100 *persone, in modo che ogni uomo ne riceva* 3, *ogni donna* 2 *ed ogni bambino mezzo. Si vuol sapere quanti sono gli uomini, quante le donne e quanti i bambini.*
Alcuino fornisce la risposta: 11 uomini, 15 donne e 74 bambini. Una semplice verifica, ci convince della correttezza del risultato.

$$11 \times 3 + 15 \times 2 + 74 \times ½ = 33 + 30 + 37 = 100$$

Se però andiamo ad impostare le equazioni risolventi,

$$u + d + b = 100 \text{ e } 3u + 2d + ½\, b = 100$$

ci accorgiamo di avere una condizione in meno di quelle necessarie affinché possiamo dire che la soluzione, se c'è, è unica.
Risolviamo il problema, ricavando una delle tre variabili da una delle due equazioni e sostituendo nell'altra, ottenendo così:

$$u = 100 - d - b \Rightarrow 300 - 3d - 3b + 2d + ½\, b = 100 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d + 5/2b = 200 \Rightarrow d = \frac{400 - 5b}{2}.$$

Dato che d deve essere un numero naturale b deve essere un numero pari ed inoltre

$$400 - 5b > 0 \Rightarrow b < 80$$

In effetti un'altra condizione da imporre è $d < 100$, quindi otteniamo l'ulteriore condizione

$$400 - 5b < 200 \Rightarrow b > 40.$$

D'altro canto anche $u < 100$, cioè $b + d < 100$, il che significa che

$$b + \frac{400 - 5b}{2} < 100 \Rightarrow -3b < -200 \Rightarrow 66 < b < 80.$$

Quindi vi sono più di una soluzione, che scriviamo nella seguente tabella:

b	68	70	72	74	76	78
d =200–5/2b	30	25	20	15	10	5
$u = 100 - d - b$	2	5	8	11	14	17

perché poi Alcuino abbia scelto la soluzione (74, 15, 11) non è dato di sapere.

② Da un manuale tedesco del 1526: *In una taverna,* 20 *persone pagano un conto di* 20 *dobloni. Vi sono uomini, donne e bambini. Sapendo che gli uomini pagano* 3 *dobloni, le donne* 2 *ed i bambini ½ doblone, determinare quanti erano gli uomini, quante le donne e quanti i bambini.*
Indichiamo gli uomini con u le donne con d e i bambini con b. Quanto affermato dal testo viene tradotto con il sistema seguente $\begin{cases} u+d+b=20 \\ 3u+2d+0,5b=20 \end{cases}$, che conduce all'equazione risolvente:

$$\begin{cases} b=20-u-d \\ b=40-6u-4d \end{cases} \Rightarrow 20-u-d=40-6u-4d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5u=20-3d \Rightarrow u=\frac{20-3d}{5}.$$

Consideriamo allora i valori di d che rendono la frazione un numero intero. Intanto deve essere anche $20 - 3d > 0$, cioè $d < 7$, quindi con semplici verifiche si trova che l'unico valore accettabile è $d = 5$. da cui si ha: $u = 1$ e $b = 14$.

② Vediamo un problema tratto dal *Ganita–Sara–Sangraha*.
Vi erano 63 *mucchi di datteri, ciascuno contenente lo stesso numero di frutti e* 7 *frutti isolati. Tutti i datteri furono divisi esattamente fra* 23 *marinai. Quanti frutti vi erano in ogni mucchio?*

Molto semplicemente si imposta la seguente equazione risolvente (n è il numero dei datteri in ogni mucchio, m è il numero di datteri che toccò a ciascun marinaio): $63n + 7 = 23m$. Dalla precedente uguaglianza ricaviamo m, ottenendo così: $n = \dfrac{23m - 7}{63}$. È evidente che il numeratore deve essere un multiplo del denominatore e poiché esso si esprime come differenza di due numeri, uno dei quali è 7, ciò significa che m deve essere multiplo di 7, diciamo per esempio $m = 7h$. Riscriviamo quindi l'uguaglianza nel modo seguente:

$$n = \frac{23 \cdot 7h - 7}{63} = \frac{7 \cdot (23h - 1)}{7 \cdot 9} = \frac{23h - 1}{9}.$$

Possiamo allora dire che $23h - 1$ deve essere un multiplo di 9, cioè $23h$ diviso per 9 ha per resto 1. Ossia $23h = 9k + 1$ che può anche scriversi $18h + 5h = 9k+1$ o anche $9\times(k-2h) = 5h-1$. Quindi dobbiamo trovare qualche valore di h compreso tra 0 e 8 per cui $5h - 1$ è multiplo di 9. Basta provare i diversi valori, trovando così $h = 2$. Otteniamo così

$$n = \frac{23 \cdot 2 - 1}{9} = \frac{45}{9} = 5, \text{ da cui } m = \frac{63 \cdot 5 + 7}{23} = \frac{322}{23} = 14.$$

③ Vediamo un vecchio problema, riportato da Bachet nella già citata opera del 1612.

Una donna mentre portava un paniere di uova al mercato fu urtata da un passante, così le uova si ruppero tutte. Richiesta su quante fossero tali uova, ella rispose di ricordare solo che se le metteva a due a due, a tre a tre, a quattro a quattro, a cinque a cinque o a sei a sei, ne rimaneva sempre uno, mentre non ne rimanevano se le metteva a sette a sette. Quante erano le uova?

Si deve quindi trovare un numero intero multiplo di 7, che diviso per 2, 3, 4, 5, o 6, abbia per resto 1. Ora dire che un numero diviso per 2 ha resto 1, vuol dire che è del tipo $2n + 1$, dato che anche diviso per 3 dà resto 1, è del tipo $3m + 1$. Quindi $2n + 1 = 3m + 1$, cioè $2n = 3m$, cioè n è divisibile per 3 e m è pari, il che equivale a dire che il numero è del tipo $6h + 1$. Ovviamente la questione si può ripetere anche negli altri casi, ciò significa che il numero è del tipo

$$mcm(2, 3, 4, 5, 6) \times a + 1 = 60a + 1$$

dobbiamo quindi cercare fra questi numeri uno che sia divisibile per 7. Le soluzioni sono quindi infinite: 301, 721, 1141, … questi numeri sono quelli dell'insieme

$$\{60 \cdot (5 + 7h) + 1, h \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Quindi la minima soluzione è 301. è facile provare che i numeri dell'insieme sono quelli cercati, il che equivale solo a fare vedere che sono multipli di 7:

$$60 \times (5 + 7h) + 1 = 300 + 420h + 1 =$$
$$= 301 + 420\,h = 7 \times (60h + 43).$$

③ Consideriamo il seguente quesito assegnato ai Giochi di Archimede del 2003, per gli alunni del triennio delle scuole secondarie.

Michael, Juan Pablo e Kimi partecipano a un campionato di automobilismo. Dopo 5 *gran premi, Michael conduce la classifica con* 43 *punti, seguito da Juan Pablo con* 42 *punti e da Kimi con* 40*. In ognuna delle* 5 *gare disputate, il primo classificato guadagnava* 10 *punti, il secondo* 8*, il terzo* 7*, dal quarto posto in poi non si guadagnavano punti. Basandovi su queste informazioni, sapreste dire chi si è piazzato al secondo posto per il maggior numero di volte?*

Indichiamo con mp, ms e mt il numero di volte che Michael è rispettivamente arrivato primo, secondo e terzo; analogamente usiamo i simboli jp, js e jt per Juan Pablo e kp, ks e kt per Kimi. Le condizioni del problema equivalgono al sistema indeterminato

$$\begin{cases} 10mp + 8ms + 7mt = 43 \\ 10jp + 8js + 7jt = 42 \\ 10kp + 8ks + 7kt = 40 \\ mp + ms + mt = 5 \\ jp + js + jt = 5 \\ kp + ks + kt = 5 \end{cases}$$

Risolviamolo nelle tre incognite *ms*, *js* e *ks*, che sono quelle che vogliamo determinare. Facilmente otteniamo:

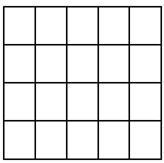
$$\begin{cases} mp = \dfrac{8 - ms}{3}; mt = \dfrac{7 - 2ms}{3} \\ jp = \dfrac{7 - js}{3}; jt = \dfrac{2 \times (4 - js)}{3} \\ kp = \dfrac{5 - ks}{3}; kt = \dfrac{2 \times (5 - ks)}{3} \end{cases}$$

Poiché debbono essere tutti numeri interi abbiamo che:
8 – *ms* e 7 – 2*ms* debbono essere numeri divisibili per 3.
Le uniche possibilità per 8 – *ms* sono *ms* = 2, 5, solo *ms* = 2 rende anche 7 – 2*ms* divisibile per 3. Quindi Michael si è piazzato due volte al secondo posto.
Analogamente, anche 5 – *ks* deve essere divisibile per 3, che implica che sia *ks* = 2. Pertanto deve essere *js* = 1 e in effetti in questo modo *jp* e *jt* saranno interi accettabili.
Possiamo dire allora che si avrà

$$\begin{cases} mp = 2; ms = 2; mt = 1 \\ jp = 2; js = 1; jt = 2 \\ kp = 1; ks = 2 : kt = 2 \end{cases}$$

Attività

1. ① **(B2000)** Angelo e Rosi questa sera hanno invitato sette amici a cena. A fine pasto vorrebbero offrire della frutta fresca, delle mele e delle pere che coglieranno nel loro frutteto. Esso però è parecchio distante dalla casa e Angelo e Rosi, ormai avanti con gli anni, sanno di non poter portare più di 7 chili di frutta in due. D´altra parte desiderano che ognuno dei loro invitati possa scegliere quali frutti mangiare. Una mela pesa 300 g; una pera 200 g. Qual è il numero massimo di frutti che essi possono cogliere recandosi una sola volta nel frutteto?
2. ① **(B2002)** Carla vuole mettere in ordine le sue monete da 1 euro. Forma allora delle pile di 9 monete e nota che il numero delle monete rimanenti è uguale al numero delle pile che ha fatto. Decide poi di ripartire l'insieme delle sue monete in pile di sette: di nuovo, constata che il numero delle monete che le restano è uguale al numero delle pile formate. Quante monete da un euro possiede Carla?
3. ① **(B2003)** Donato e Michele, per contare tutti i quadrati della figura a lato, si sono ripartiti i compiti. Donato conta i quadrati di lato 1 e i quadrati di lato 4 e segna 5 punti per ogni quadrato di lato 1 e 7 punti per ogni quadrato di lato 4. Michele, invece, conta i quadrati di lato 2 e quelli di lato 3 e attribuisce x punti a ogni quadrato di lato 2 e y punti a ogni quadrato di lato 3. Sappiamo che x e y sono due numeri interi, entrambi diversi da 5 e da 7, con $0<x<y$. Sorpresa! Michele ottiene esattamente lo stesso totale di Donato! Trova x e y.



4. ① **(B2003)** . Chiara e Anna hanno scelto ognuna un numero intero positivo. Il prodotto di un terzo del numero di Chiara per un quinto del numero di Anna è uguale alla somma di un quinto del numero di Chiara e di un terzo del numero di Anna. Quali sono i due numeri?
5. ① **(B2008)** Carla ha spedito un pacchetto alla sua amica Milena, con un regalino per il compleanno. Per le spese di spedizione, ha messo sul pacchetto solo francobolli da 0,60 Euro e da 0,80 Euro per un valore totale di 6,60 Euro. Carla ha utilizzato complessivamente meno di 10 francobolli. Quanti francobolli da 0,80 Euro ha utilizzato ?
6. ① **(B2008)** Il numero 55 possiede le seguenti proprietà :
   • se gli si sottrae 1, si ottiene un multiplo di 9;
   • se gli si aggiunge 1, si ottiene un multiplo di 8.
   Qual è il più piccolo numero di 3 cifre che possiede le stesse proprietà?
7. ① **(AHSME1958)** Con 1000 dollari un mandriano compra dei manzi a 25 dollari l'uno e delle vacche a 26 dollari l'una. Quanti capi di ciascun tipo ha comprato?
8. ① **(AHSME1971)** Un teenager (cioè con età da 13 a 19 anni), scrive una accanto all'altra l'età di suo padre e quella sua, ottenendo un numero di 4 cifre, poi vi sottrae la differenza positiva delle età, ottenendo 4289. Quanti anni hanno insieme padre e figlio?
9. ① **(AHSME1985)** Trovare il minimo n naturale per cui la frazione $\dfrac{n-13}{5n+6}$ è riducibile.
10. ① **(A1998)** Scrivere il numero 45 come somma di 4 numeri interi, in modo che aggiungendo 2 al primo addendo, sottraendo 2 dal secondo, moltiplicando il terzo per 2 e dividendo il quarto per 2 si ottengono numeri uguali.
11. ② **(B2002)** Desiderio ha scritto tre numeri primi e ha notato che il loro prodotto è uguale a 7 volte la loro somma. Quali sono, in ordine crescente, questi tre numeri?

12. ② Da un manoscritto arabo del 1200: Un'oca costa 5 dracme, una gallina 1 dracma e 20 pulcini 1 dracma. Avendo 100 dracme e volendo comprare 100 animali, quanti dovrai prenderne di ciascun tipo?
13. ② Dal *Lilavati* di Bhaskara, circa 1100: O matematico, rispondi rapidamente. Qual è il minimo numero naturale che moltiplicato per 221 ed aumentato di 65 diviene un multiplo di 195?
14. ② Dal *Bija–Ganita* di Bhaskara, circa 1100: Un uomo possiede 5 rubini, 8 zaffiri, 7 perle e 92 monete, un altro ha 7 rubini, 9 zaffiri, 6 perle e 62 monete. Se i due sono ugualmente ricchi, sai dire qual è il minimo valore espresso in monete, di ciascun tipo di pietre preziosa?
15. ② Da *Problèmes plaisans et delectable qui se font par les nombres* di Gaspar Bachet, signore di Meziriac,del 1612: 41 persone fra uomini, donne e bambini mangiano ad una locanda. Il conto è di 40 soldi. Gli uomini pagano 4 soldi, le donne 3 ed i bambini ½ soldo. Quanti sono gli uomini, quante le donne e quanti i bambini?
16. ② Un anno fa Alex aveva un età il cui valore numerico era reversale (per esempio 27 e 72) di quella di sua madre Xela. Quest'anno invece la sua età è reversale di quella di suo padre Eric. Se la somma delle età dei suoi genitori, oggi, è di 93, determinare l'età attuale di Alex.
17. ② Un teatro ha 100 posti. Il proprietario vuole incassare 100 euro facendo pagare 5 euro il prezzo intero, 2 euro il ridotto militari e per ogni 10 ragazzi al di sotto dei 12 anni farà pagare 1 euro. Quanti adulti, militari e ragazzi devono entrare?
18. ② Dall'Algebra di Eulero del 1770. Dividi 100 in due addendi, uno divisibile per 7 e l'altro per 11.
19. ② Da Ganitasarasangraha di Sri Mahaviracarya (IX secolo). Furono raccolte delle mele, che furono sistemate in 37 cassette, ciascuna contenente lo stesso numero di frutti. Ogni cassetta conteneva più di 100 e meno di 200 mele.

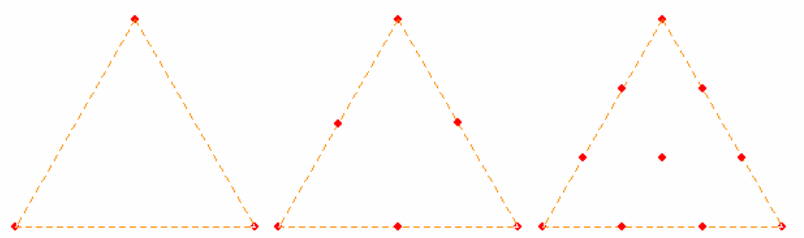
Sapendo che i raccoglitori erano 79 e che quando si divisero le mele in parti uguali ne avanzarono 17, si vuol sapere quante mele ebbe ciascun raccoglitore e quante ne conteneva ciascuna cassetta.

20. ③ Dal *Bija–Ganita* di Bhaskara, circa 1100. Quattro uomini posseggono rispettivamente 5, 3, 6 e 8 cavalli. Gli stessi uomini posseggono 2, 7, 4 e 1 cammello. Poi hanno 8, 2, 1 e 3 muli e 7, 1, 2 e 1 vitello. Il valore dei loro animali li rende ugualmente ricchi. Dimmi rapidamente quanto vale un cavallo, un cammello, un mulo e un vitello.
21. ③ Da Beiler. Un turista e una guida salgono i gradini della piramide di Cheope inseguiti da un leone. Se il turista riesce a salire 5 gradini alla volta, la guida 6 e il leone 7 e se a un certo punto, il turista si trova a un gradino dalla cima, la guida a 9 e il leone a19, quanti gradini ha la piramide?
22. ③ **(GAT2003)** Anna e Marco hanno una collezione di più di 40, ma meno di 80, cartoline. Anna nota che il numero delle cartoline meno 3 è multiplo di 8. Marco invece nota che il numero di cartoline meno 1 è multiplo di 5. Quante cartoline hanno in totale Anna e Marco?
23. ③ Trovare il minimo numero intero multiplo di 7, che diviso per 2 ha resto 1, diviso per 3 ha resto 2, per 4 ha resto 3, per 5 resto 4 e per 6 resto 5. Osservare che se un numero diviso per 3 ha resto 2 è lo stesso che dire che ha resto –1, e così via.

Le risposte commentate si trovano a partire da pagina 117.

Numeri figurati

I cosiddetti pitagorici, cioè i seguaci di Pitagora, nato a Samo circa nel 569 a.C. e morto circa nel 475 a.C., avevano una vera e propria adorazione per i numeri interi. Arrivarono così al punto di associare dei numeri a certe figure geometriche, come mostrato nella figura seguente.



In questo caso ai triangoli, abbiamo associato i numeri 3, 6 e 10. Ma come si ottengono questi numeri *triangolari*? Non è difficile capire che ogni numero si ottiene dal precedente aggiungendo un numero naturale che è maggiore di 1 rispetto alla precedente somma. Cioè 6 = 3 + 3, 10 = 6 + 4, così il successivo numero sarà 10 + 5 = 15 e così via. Perciò in generale un numero triangolare è somma dei primi numeri naturali consecutivi. Infatti 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10 e così via. Ora la somma di questi numeri si ottiene facilmente con una semplice operazione, che, secondo un aneddoto probabilmente falso, fu scoperta dal grande matematico tedesco Karl Friedrich Gauss (Brunswick 30/04/1777, Göttingen 23/02/1855) all'età di dieci anni. Per esempio supponiamo di volere sommare i primi dieci numeri naturali:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

poiché la somma gode della proprietà associativa, possiamo sistemare gli addendi a nostro piacere e noi lo facciamo considerando il primo con l'ultimo, il secondo con il penultimo e così via:

$$(1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6)$$

in questo modo vediamo che le somme hanno tutte lo stesso valore: 11. e poiché queste somme sono in numero di 5, possiamo dire semplicemente che

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 11 \times 5 = 55.$$

Per trovare una formula generale dobbiamo però esprimere 11 e 5 in funzione dei dieci numeri. 5 è proprio la metà dei numeri, mentre 11 è il successivo di tale numero. Quindi possiamo scrivere:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = (10+1)\times\frac{10}{2}.$$

Verifichiamo la nostra formula per la somma dei primi 12 numeri naturali:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 =$$
$$= (12+1)\times\frac{12}{2} = 13\times 6 = 78.$$

Potremmo pensare però che la formula valga solo se i numeri sono pari, dato che se fossero dispari non potremmo accoppiarli:

$$(1 + 11) + (2 + 10) + (3 + 9) + (4 + 8) + (5 + 7) + 6$$
$$= 12 \times 6 = (11+1)\times\frac{12}{2} = 72.$$

È facile trovare una formula generale:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\times(n+1)}{2}.$$

Anche se può sembrare strano, come primo numero triangolare non si considera 3, bensì 1. Ogni numero triangolare si indica con T_n, in cui n indica quanti addendi devono sommarsi per ottenerlo. Così $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + 2 = 3$, $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, e così via.

- ① Fra i numeri triangolari alcuni sono dei quadrati perfetti, per esempio lo sono

$$T_1 = 1,\ T_8 = \frac{8\cdot 9}{2} = 36 \text{ e } T_{49} = \frac{49\cdot 50}{2} = 1225.$$

Diciamo che, visto come si ottiene un numero triangolare, esso è un quadrato perfetto se è prodotto di un quadrato perfetto per il doppio di un quadrato perfetto. Dobbiamo perciò cercare i quadrati fra gli T_n, in cui n è un quadrato perfetto (come 1 e 9), o un numero che precede un quadrato perfetto, come 8.

Consideriamo il seguente quesito tratto dal testo di Beiler in bibliografia.

② *In una data via i numeri civici iniziano da* 1. *Un uomo nota che la somma dei numeri civici delle case che precedono la sua è uguale alla somma dei numeri civici di quelle che la superano. Determinare il numero civico della casa dell'uomo sapendo che esso è maggiore di* 100 *e minore di* 1000.
Diciamo n il numero da determinare. Nel caso in cui le case abbiano numeri consecutivi, quelle che lo precedono sono in numero di $(n - 1)$ e la somma dei loro numeri civici è

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = \frac{(n-1)\cdot n}{2}$$

la somma dei numeri che la seguono, se tutte le case sono k, con $k > n$, è

$$(n + 1) + \ldots + k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) + \ldots + \\ + k - [1 + 2 + 3 + \ldots + n\ ] = \\ = \frac{k\times(k+1)}{2} - \frac{n\times(n+1)}{2} = \frac{k^2+k-n^2-n}{2}$$

Dobbiamo perciò avere:

$$\frac{k^2+k-n^2-n}{2} = \frac{(n-1)\times n}{2} \Rightarrow k^2+k-n^2-\cancel{n} = n^2-\cancel{n} \Rightarrow \\ \Rightarrow k^2+k = 2n^2 \Rightarrow k\cdot(k+1) = 2n^2 .$$

Pertanto dobbiamo trovare due numeri interi consecutivi il cui prodotto è il doppio di un quadrato, o meglio, dato che possiamo anche scrivere $\frac{k\times(k+1)}{2} = n^2$, un numero triangolare che sia anche un quadrato compreso tra 100 e 1000. Dobbiamo quindi provare per k = 120, 121, 143, 144, 168, 169, …, 960, 961. Il primo, e unico, che troviamo è k = 288. In questo caso

$$n = \sqrt{\frac{288 \cdot 289}{2}} = \sqrt{144 \cdot 289} = 12 \cdot 17 = 204\,.$$

③ Il seguente quesito è stato assegnato ai Giochi di Archimede del triennio per l'anno 2003.

Si consideri l'insieme {1; 2; … ; 2003}. *Quanti sono i suoi sottoinsiemi B tali che la somma degli elementi di B è uguale a* 2 007 000?

Cominciamo ad osservare che se un certo sottoinsieme di *B* ha elementi la cui somma fa *n*, il suo complementare, cioè l'insieme formato con tutti gli altri elementi di *B*, deve fare la differenza fra la somma di tutti i numeri da 1 a 2003 e *n*. Siccome

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2003 = \frac{2003 \times 2004}{2} = 2007006$$

vuol dire che gli insiemi cercati hanno complementari i cui elementi hanno per somma 6. Ma di insiemi del genere ci sono solo:

$$\{6\}, \{1, 5\}, \{2, 4\} \text{e } \{1, 2, 3\}$$

Quindi gli insiemi cercati sono i complementari di questi e sono anch'essi in numero di 4.

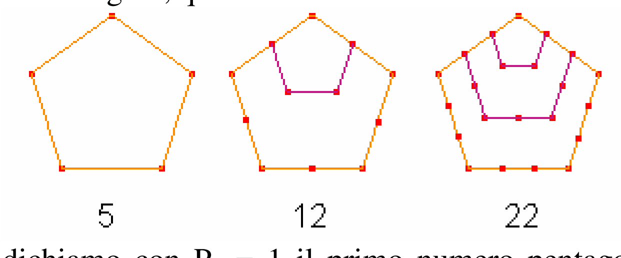
Attività

1. ⓪ **(B1996)** Paola gioca a salterello ed è appena arrivata su una casella tra quelle indicate nella figura. La somma dei numeri scritti nelle caselle poste a sinistra di quella che Paola ha raggiunto è uguale a quella dei numeri posti alla sua destra. Su quale casella si trova Paola?

1	2	3	4	5	6	7	8

2. ⓪ Trovare la somma dei primi 20 numeri naturali consecutivi.
3. ⓪ **(GAB2008**) In un sacchetto ci sono 20 palline e su ciascuna `e scritto un numero intero compreso tra 0 e 10 (0 e 10 inclusi). Il numero scritto su ogni pallina se non è zero è la somma dei numeri scritti su tutte le altre palline. Allora le palline su cui `e scritto zero sono:
4. ① Trovare la somma 2 + 4 + 6 + .. + 30.
5. ① Trovare la somma 3 + 6 + 9 + .. + 30.
6. ① Trovare la somma 13 + 14 + 15 + .. + 28.
7. ① Osserviamo che
$$1^3 = T_1^2,\ 1^3 + 2^3 = 9 = T_2^2,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = T_3^2.$$
Senza effettuare i calcoli, quanto fa $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$?
8. ① Osserviamo che
$$8 \times T_1 + 1 = 9,\ 8 \times T_2 + 1 = 25,\ 8 \times T_3 + 1 = 49.$$
Senza effettuare i calcoli, quanto fa $8 \times T_4 + 1$?
9. ① **(GAB2004)** Venti soffici cuscini sono impilati uno sopra l'altro. Ogni cuscino pesa 500 g ed ha inizialmente uno spessore di 30 cm. Nella pila, però, lo spessore di ogni cuscino si riduce in ragione di 2 cm per ogni chilo di peso sopra di esso (1 cm ogni mezzo chilo). Quanto è alta la pila di cuscini?
10. ① **(GAB2003)** Qual è il più grande degli interi positivi n tali che la media aritmetica dei numeri da 1 a n sia minore di 2003 ? (Nota: la media aritmetica di n numeri è uguale alla loro somma divisa per n.)
11. ② La somma di n numeri naturali consecutivi è 153, quanti sono i numeri?

12. ② Trovare una formula per calcolare la somma dei primi n numeri pari.
13. ② Trovare una formula per calcolare la somma dei primi n numeri multipli di 3.
14. ② Trovare una formula per calcolare la somma dei primi n numeri multipli di m
15. ② **(AHSME1993)** Consideriamo la seguente successione di numeri interi
$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$$
in cui scriviamo i successivi numeri interi tante volte quanto il numero stesso. Se dividiamo il 1993° elemento di questa successione per 5, qual è il resto della divisione?
16. ② **(GAT20083)** Per ogni numero naturale n indichiamo con S_n la somma dei primi dieci multipli di n: ad esempio
$$S_2 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20.$$
Quanto vale $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{10}$?
17. ② **(GAT20083)** La somma di tutti i numeri naturali formati da due cifre distinte \`e:
18. ② Quali fra i seguenti è un numero triangolare: 91, 106, 170, 190, 231?
19. ② Osserviamo che $T_1 + T_2 = 4$, $T_2 + T_3 = 9$, $T_3 + T_4 = 16$. Senza fare conti possiamo ipotizzare quanto fa $T_{10} + T_{11}$?
20. ② Possiamo costruire anche i numeri pentagonali, come mostrato in figura, quanto vale il successivo?



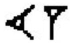
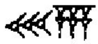
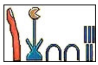
21. ② Indichiamo con $P_1 = 1$ il primo numero pentagonale, con $P_2 = 5$ il secondo e così via. Possiamo dire che $P_6 = P_5 + x$. Quanto vale x?
22. ② Osserviamo che $P_2 - T_1 = 5 - 1 = 4$, $P_3 - T_2 = 12 - 3 = 9$. Senza effettuare i calcoli, quanto fa $P_4 - T_3$?

23. ② Trovare altri due numeri triangolari che siano quadrati perfetti, oltre i tre da noi mostrati.
24. ③ Quanto fa $T_n + T_{n+1}$?
25. ③ Quanto fa $8 \times T_n + 1$?
26. ③ Trovare una formula per calcolare P_n.
27. ③ Quanto fa $P_n - T_{n-1}$?

Le risposte commentate si trovano a partire da pagina 127.

Risposte alle Attività proposte

Un po' di storia

1. XXXXI
2. XXIII
3. VII
4. XLII
5. 
6. 
7. 
8. 
9. XI, XV, XX, XL, LI, LV, LX, XC
10. X, L
11. LXXXVIII
12. CII, CIV, CIX, CXI, CXX, CXL, CLI, CLX, CXC, CCI, CCV, CCX, CCC, CDI, CDV, CDX, CDL, DII, DIV, DVI, DIX, DXI, DXX, DXL, DLI, DLV, DLX, DCI, DCV, DCX, DCL, DCC, CMI, CMV, CMX, CML
13. DCCCLXXXVIII
14. ; ; 
15. a. Spezziamo uno stuzzicadenti e lo pieghiamo in forma di $\wedge$, in questo modo V diventa X e X = II + VIII; b. La prima I del risultato la incrociamo col nuovo stuzzicadenti, ottenendo X. Quindi VII + V = XII. c. Incliniamo la prima I e la attacchiamo all'altro stuzzicadenti, ottenendo V. Così VV = II + VIIII.

Scoprire un numero pensato

1. Se sommiamo i sei numeri otteniamo il doppio dei pesci presi, quindi il numero richiesto è
$$\frac{14+20+18+12+16}{2}=40$$
2. Poiché le divisioni devono risultare esatte, possiamo eseguirle solo se il dividendo è un multiplo di 3. Quindi l'unica sequenza possibile è la seguente:
$$2008 \xrightarrow{-1} 2007 \xrightarrow{:3} 669 \xrightarrow{:3} 223 \xrightarrow{-1}$$
$$222 \xrightarrow{:3} 74 \xrightarrow{-1} 73 \xrightarrow{-1} 72 \xrightarrow{:3} 24 \xrightarrow{:3}$$
$$8 \xrightarrow{-1} 7 \xrightarrow{-1} 6 \xrightarrow{:3} 2 \xrightarrow{-1} 1$$
Quindi in totale 13 volte.
3. Abbiamo la seguente sequenza:
$$2008 \to 1004 \to 502 \to 251 \to (252/2) =$$
$$= 126 \to 63 \to (64/2) = 32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2.$$
Totale: 11
4. Abbiamo la seguente sequenza:
$$2020 \to 1010 \to 505 \to (516/2) = 258 \to 129 \to (140/2)$$
$$= 70 \to 35 \to (46/2) = 23 \to (34/2) = 17 \to (28/2) =$$
$$= 14 \to 7 \to (18/2) = 9 \to (20/2) = 10 \to 5 \to (16/2) =$$
$$= 8 \to 4 \to 2.$$
Totale 17
5. Le potenze di 2, dato che in questo caso le divisioni saranno sempre esatte, ottenendo sempre numeri pari.
6. Poiché il numero deve finire per 5 togliamo sicuramente 1200 e 1364. Per gli altri, togliamo da ciascuno 125, ottenendo 1000, 1840 e 2230. di questi tre solo 2230 non è divisibile per 40, quindi neanche 2355 si può ottenere.
7. Indicando con x il numero pensato, avremo la seguente sequenza:
$$x \to 2x \to 2x - 4 \to 3 \times (2x - 4) =$$
$$= 6x - 12 \to 6x - 7 \to 6 \times (6x - 7) = 36x - 42.$$
Quindi la regola è: *aggiungere* 42 *e dividere per* 36.

8. Applichiamo la regola: $822 + 42 = 864 \rightarrow 864/36 = 24$
9. Vanno bene 318 e 426, dato che si ha:
$$(318 + 42)/36 = 10 \text{e } (426 + 42)/36 = 13.$$
Non sono invece accettabili gli altri numeri perché
$$(355 + 42)/36,\ (380 + 42)/36 \text{ e } (460 + 42)/36$$
non sono numeri interi.
10. Indicando con x il numero pensato, avremo la seguente sequenza:
$$x \rightarrow 3x \rightarrow 3x + 6 \rightarrow 4 \times (3x + 6) =$$
$$= 12x + 24 \rightarrow 12x + 21 \rightarrow 2 \times (12x + 21) = 24x + 42$$
Quindi la regola è: *sottrarre* 42 *e dividere per* 24.
11. Applichiamo la regola: $474 - 42 = 432 \rightarrow 18$
12. Vanno bene 402, 426 e 450, dato che si ha:
$$(402 - 42)/24 = 15;\ (426 - 42)/24 = 16;$$
$$= (450 - 42)/24 = 17.$$
Non vanno bene gli altri due perché
$$(353 - 42)/24 \text{ e } (376 - 42)/24$$
non sono numeri interi.
13. Partiamo da Beatrice, che può avere estratto soltanto (1, 3). Domenico può avere estratto invece solo (1, 6), (2, 5) o (3, 4), ma la prima e la terza coppia devono essere eliminate per le carte estratte da Beatrice. Quindi Domenico ha estratto (2, 5). Adriano ha potuto estrarre (1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7) o (5, 6). Tenuto conto delle altre estrazioni, per Adriano rimane solo la possibilità (4, 7). Pertanto Claudia potrà estrarre solo (5, 11) ed Emanuela solo (8, 11). Infine i numeri cercati sono: (4, 1, 6, 2, 8)
14. Indichiamo il numero come $7abcdef9$. Deve aversi:
$$7 + a + b = a + b + c \Rightarrow c = 7.$$
$$d + e + f = e + f + 9 \Rightarrow d = 9.$$
Il numero è divenuto: $7ab79ef9$. Avremo poi:
$$a + b + 7 = b + 7 + 9 \Rightarrow a = 9.$$
$$7 + 9 + e = 9 + e + f \Rightarrow f = 7.$$
Perciò avremo: $79b79e79$. Infine

$7 + 9 + b = 20 \Rightarrow b = 4$; $e + 7 + 9\ \ 20 \Rightarrow e = 4$.

Il numero cercato è perciò: 79479479.

15. Al massimo Pom Pom può sentire 5 rintocchi per le mezzore e 9 + 10 + 11 + 12 + 1 = 43 rintocchi per le ore, in totale 48 rintocchi. Perciò non ha sentito 12 rintocchi. Se questi sono i rintocchi delle 12:00, allora può avere dormito dalle 11:30 (subito dopo il rintocco) alle 12:30 (subito prima del rintocco, cioè 1 ora. Se invece non ha sentito i colpi delle 11:00 e uno dei rintocchi della mezzora precedente o successiva, ha dormito 1,5 ore. Infine può aver non sentito i rintocchi delle 9:30, 10:00 e 10:30, dormendo così dalle 9:00 (subito dopo i rintocchi) alle 11:00 (subito prima dei rintocchi, per un totale massimo di 2 ore.
16. Cominciamo ad osservare che non è detto che i numeri scritti fossero interi. Indichiamo con $a>b>c>d>e$ i 5 numeri, le dieci somme sono perciò
$a + b$, $a + c$, $a + d$, $a +$ e, $b + c$, $b + d$, $b +$ e, $c + d$, $c +$ e, $d+e$.
Sommando queste somme otteniamo 4a + 4b + 4c + 4d + 4e, il cui risultato è
$$6 + 7 + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 + 10 + 11 + 12 = 90.$$
Ma allora la somma dei 5 numeri è 90/4 = 22,5. Ovviamente la maggiore delle dieci somme si ottiene sommando i due numeri più grandi, d + e = 12, mentre la minore sommando i numeri minori, cioè $a + b = 6$. Quindi da $a + b + c + d +$ e = 22, 5 e da quanto appena detto abbiamo:
$6 + c + 12 = 22,5$, cioè $18 + c = 22,5$, perciò $c = 4,5$.
Ovviamente avremo anche $a + c = 7$, perciò $a + 4,5 = 7$, da cui $a = 2,5$. ragionando in questo modo troveremo $b = 3,5$; $d = 5,5$; e = 6,5.
17. La regola è equivoca perché due numeri consecutivi danno lo stesso risultato. Per esempio sia 8 che 7 producono lo stesso numero finale:

$$8 \xrightarrow{:2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{\times 4} 28 \xrightarrow{-2} 26 \text{ e}$$
$$7 \xrightarrow{+1} 8 \xrightarrow{:2} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{\times 4} 28 \xrightarrow{-2} 26$$

18. Procediamo all'inverso.

$$66 \xrightarrow{+2} 64 \xrightarrow{:4} 16 \xrightarrow{-3} 13 \xrightarrow{\times 2} \prec \begin{matrix} 26 \\ 26 \xrightarrow{-1} 25 \end{matrix}.$$

Anche in questo caso ci sono due possibilità.

19. Vanno bene 80 e 97 come si vede di seguito:

$$80 \xrightarrow{+2} 82 \xrightarrow{:4} 20,5;\ 97 \xrightarrow{+2} 99 \xrightarrow{:4} 24,75$$

Mentre non vanno bene gli altri:

$$82 \xrightarrow{+2} 84 \xrightarrow{:4} 21 \xrightarrow{-3} 18 \xrightarrow{\times 2} \prec \begin{matrix} 36 \\ 35 \end{matrix};$$
$$86 \xrightarrow{+2} 88 \xrightarrow{:4} 22 \xrightarrow{-3} 19 \xrightarrow{\times 2} \prec \begin{matrix} 38 \\ 37 \end{matrix};$$
$$90 \xrightarrow{+2} 92 \xrightarrow{:4} 23 \xrightarrow{-3} 20 \xrightarrow{\times 2} \prec \begin{matrix} 38 \\ 39 \end{matrix};$$

20. Perché la differenza (13 + 31 + 49) – (24 + 42) è dispari, mentre invece, essendo il doppio del primo numero, dovrebbe essere pari.
21. Le somme a due a due consecutive e poi la somma fra il secondo e l'ultimo
22. Abbiamo

$$a+b=12;\ b+c=23;\ c+d=35;\ d+e=49;\ e+f=67;\ b+f=48.$$

Sommando alternativamente le somme abbiamo:

$$(a + b + c + d + e + f) = 12 + 35 + 67 = 114, \text{ e}$$
$$(b + c + d + e + b + f) = 23 + 49 + 48 = 120.$$

Sottraendo queste due somme abbiamo:

$$(2b + c + d + e + f) - (a + b + c + d + e + f) = 120 - 114$$

cioè $b-a = 6$, e dato che $a + b = 12$, vuol dire che è $2b=18$, cioè $b = 9$ e $a = 3$. A questo punto è facile trovare $c = 14$, $d=21$, $e = 28$, $f = 39$

23. Perché la differenza (20 + 42 + 56) – (31 + 50 + 60) è dispari, mentre invece, essendo il doppio del secondo numero, dovrebbe essere pari.

24. Perché Damiano sia sicuro di indovinare, vuol dire che ha scritto dei numeri le somme delle cui cifre sono tutte diverse. Così non ha potuto scrivere per esempio 23 e 14 perché per entrambi la somma fa 5. Visto che i numeri di due cifre possono assumere come somme tutti i numeri interi da 1, per esempio il 10, a 18, per esempio il 99, vuol dire che al massimo ha potuto scrivere 18 numeri. Per esempio ha potuto scrivere: 10, 11, 22, 30, 32, 45, 51, 53, 58, 64, 70, 74, 84, 77, 88, 89, 96, 99.
25. Osserviamo che il quinto numero è somma di tre numeri dispari e un numero pari, quindi è un numero dispari. Anche il successivo è somma di tre dispari e un pari, quindi è dispari. Continuando in questo modo, vediamo che otteniamo al massimo un numero pari, quando andremo a sommare quattro numeri dispari, poi sempre numeri dispari. Quindi non è possibile ottenere 1, 2, 3, 4, né nessun'altra quaterna formata da due dispari e un pari.
26. Qualunque sia il numero quando lo moltiplichiamo per 40, la sua cifra delle unità sarà zero e la sua cifra delle decine sarà pari. Dato che a questo prodotto aggiungiamo 125, la cifra delle unità diventa 5 e la cifra delle decine rimane pari. Pertanto la cifra delle decine più una fra 0, 2, 4, 6, 8.

La notazione posizionale

1. Vediamo per esempio l'ultima:
$$123456789 \times 9 + 10 = (10^8 + 2\times10^7 + 3\times10^6 + 4\times10^5 +$$
$$+5\times10^4 + 6\times10^3 + 7\times10^2 + 8\times10 + 9) \times (10 - 1) + 10 =$$
$$= (10^9 + 2 \times 10^8 + 3 \times 10^7 + 4 \times 10^6 + 5 \times 10^5 +$$
$$+ 6 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 9 \times 10) -$$
$$- (10^8 + 2 \times 10^7 + 3 \times 10^6 + 4 \times 10^5 + 5 \times 10^4 +$$
$$+ 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10 + 9) + 10 =$$
$$= 10^9 + 10^8 + 10^7 + 10^6 + 10^5 + 10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1 =$$
$$= 1111111111$$
2. Abbiamo:
$$987 \times 9 + 5 = 8888;$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88888;$$
$$98765 \times 9 + 3 = 888888;$$
$$987654 \times 9 + 2 = 8888888;$$
$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$
3. Con 3 cifre la somma più grande ottenibile è evidentemente 27 = 9 + 9 + 9. Poiché però le pagine sono al massimo 256, la maggiore somma si ottiene con 199, ed è 19. Pertanto l'altro numero è 198 e la somma è perciò 18 + 19 = 37. Il numero cercato è quindi 198
4. Si ha: $8749 \times 11 = 8749\ (10 + 1) = 87490 + 8749 = 96239$
5. Per essere sicura di vincere, Giulia deve mettere in condizione Bernardo di non potere scrivere alcun numero, quindi intanto lo deve costringere a scrivere senza potere scegliere. Il che accade se scrive 8, perché così facendo Bernardo deve scrivere per forza 9, a questo punto Giulia può scrivere quello che vuole e scriverà ancora 8, Bernardo risponderà ancora con 9 e Giulia metterà di nuovo 8 e Bernardo di nuovo 9. A questo punto Giulia non può più scrivere 8, perché lo ha già scritto tre volte, allora scrive 7 e ha vinto, perché Bernardo deve rispondere con un numero maggiore, ma 8 e 9 sono già stati scritti 3 volte.

6. Se il numero non cambia deve avere le cifre delle unità e delle decine uguali, cioè deve essere di tipo *aba*. Siccome deve essere pari e il più grande deve essere 898. La somma cercata è perciò 8 + 9 + 8 = 25.
7. Si ha:

$$123 \times 8 + 3 = 987;$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876;$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765;$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654;$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543;$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432;$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

8. Abbiamo:

$$1111^2 = 1234321;$$
$$11111^2 = 123454321;$$
$$111111^2 = 12345654321;$$
$$1111111^2 = 1234567654321;$$
$$11111111^2 = 123456787654321;$$
$$111111111^2 = 12345678987654321$$

9. Poiché $[440]_r + [340]_r = [1000]_r$, vuol dire che $[4]_r + [4]_r$ è un numero che finisce per 0, che significa che 8 è la base cercata.
10. Poiché $[52]_b = 2 \times [25]_b$, vuol dire che

$$5 \times b + 2 = 2 \times (2 \times b + 5)$$

cioè

$$5 \times b + 2 = 4 \times b + 10 \Rightarrow b = 8.$$

11. Consideriamo un generico numero di due cifre: *du*, che può scriversi anche $10 \times d + u$. Scambiamo fra loro le cifre, ottenendo *ud*, che si scrive anche $10 \times u + d$. Adesso sottraiamo i due numeri, tenendo conto che deve essere $d < u$, dato che scambiando l'ordine dobbiamo avere un numero maggiore.

$$10 \times u + d - (10 \times d + u) = 9u - 9d$$

Deve quindi essere $9u - 9d = 9$, cioè $u - d = 1$.

Cioè i numeri devono essere formati da cifre consecutive, il che accade in 8 casi:

12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89.

12. Se consideriamo i numeri da 10 a 19, divideremo per numeri che vanno da 1 a 10, quindi il quoziente più piccolo si ha per 19 : 10 = 1,9. Per i numeri da 20 a 29, divideremo per numeri da 2 a 11, quindi il quoziente più piccolo si ha per 29 : 11 = 2,6363…. È facile capire che basta dividere i numeri con cifra delle unità pari a 9. Allo stesso modo si capisce che così facendo otteniamo numeri sempre più grandi: 39:12 = 3,25; 49:13 = 3,76… quindi il numero cercato è 19.
13. I numeri delle pagine sono ovviamente consecutivi. Ora se i due non sono uno che finisce per nove e l'altro per zero, allora la somma delle loro cifre differisce di una unità. Per esempio 152 e 153 hanno somma delle cifre, rispettivamente 8 e 9, ma anche 150 e 151 hanno somme consecutive, 6 e 7. Ma allora non è possibile che la somma faccia diciotto, dato che la somma di due numeri consecutivi è sempre un numero dispari. Se invece i numeri sono come 149 e 150, allora le due somme differiscono di 8. Lo stesso accade anche per 89 e 90 o per altre somme del genere. Poiché la cifra delle unità del primo numero è 9 e quella del secondo è zero. Vuol dire che le altre cifre insieme devono dare 9. Ciò è possibile solo per i numeri consecutivi 49 e 50, e 139 e 140. Quindi il capitolo inizia a pagina 49 e finisce a pagine 140, per un totale di 140 – 49 + 1 = 92 pagine.
14. Vediamo di considerare qualche caso, per capire cosa succede. Se il quaderno ha 10 pagine, scriviamo i numeri da 1 a 10, che sono formati da 9 + 2 = 11 cifre. Se aggiungiamo due pagine (una pagina non si può aggiungere, perché un foglio ha due facciate) scriveremo altre 4 cifre (i numeri 11 e 12). Così 12 pagine e 15 cifre. Come si vede la crescita è lenta. Vediamo cosa succede se il quaderno ha 100

pagine. Abbiamo scritto 9 numeri da 1 cifra, 90 da due cifre e uno da tre cifre. Quindi abbiamo scritto

$$9 + 2 \times 90 + 3 = 192$$

cifre, che non è ancora il doppio di 100, ma vi è vicino. Adesso ogni pagina aggiunta comporta un aumento di 6 cifre, contro un aumento di due unità. Non è perciò difficile capire che il numero cercato è 108, dato che

$$192 + 3 \times 8 = 216 = 2 \times 108.$$

15. Indichiamo con x, y e z le tre cifre. La somma calcolata è

$$xy + yx + xz + zx + yz + zy$$

tenuto conto della notazione posizionale la somma si scrive:

$$10x + y + 10y + x + 10x + z + 10z + x + 10y + z + 10z + y$$

cioè

$$20 \times (x + y + z) + 2 \times (x + y + z) = 22 \times (x + y + z)$$

Cioè la somma è divisibile per 22. Ora fra i numeri di 3 cifre pari e divisibili per 11, abbiamo il 132, il 264 e il 396 che verificano la proprietà richiesta:

$$132 = 22\times(1+2+3);\ 264 = 22\times(2+4+6);\ 396 = 22\times(3+6+9)$$

In effetti

$$12 + 21 + 13 + 31 + 23 + 32 = 132;$$
$$24 + 42 + 26 + 62 + 46 + 62 = 264;$$
$$36 + 63 + 39 + 93 + 39 + 93 = 396.$$

16. I numeri ovviamente devono avere almeno 3 cifre, anzi devono averne proprio 3, perché un numero di 4 cifre è maggiore o uguale a 10000 e la somma delle sue cifre non può essere maggiore di $9 \times 4 = 36$. Questo ci convince anche del fatto che i numeri cercati sono del tipo $2abc$. Piuttosto che cercare questi numeri scriviamo la condizione richiesta:

$$1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 2007$$

cioè $999a + 99b + 9c = 2007$, o anche $111a+11b+c = 223$. Quindi ovviamente, come avevamo già osservato, $a = 2$.

E $\qquad 222 + 11b + c = 223 \Rightarrow 11b + c = 1 \Rightarrow b = 0, c = 1.$

Infine i numeri cercati sono 201d, con d che può essere una qualsiasi delle 9 cifre. I numeri cercati sono allora

$$2010, 2011, \ldots, 2018, 2019.$$

17. Si ha:

$$999^2 = 998001;$$
$$9999^2 = 99980001;$$
$$99999^2 = 9999800001;$$
$$999999^2 = 999998000001;$$
$$9999999^2 = 99999980000001;$$
$$99999999^2 = 9999999800000001;$$
$$999999999^2 = 999999998000000001$$

18. Si ha:

$$987654321 \times 27 = 26666666667;$$
$$987654321 \times 36 = 35555555556;$$
$$987654321 \times 45 = 44444444445;$$
$$987654321 \times 54 = 53333333334;$$
$$987654321 \times 63 = 62222222223;$$
$$987654321 \times 72 = 71111111112;$$
$$987654321 \times 81 = 80000000001$$

19. Si ha:

$$12345679 \times 27 = 333333333;$$
$$12345679 \times 36 = 444444444;$$
$$12345679 \times 45 = 555555555;$$
$$12345679 \times 54 = 666666666;$$
$$12345679 \times 63 = 777777777;$$
$$12345679 \times 72 = 888888888;$$
$$12345679 \times 81 = 999999999$$

20. Si ha:

$$777 \times 999 = 776223;$$
$$7777 \times 9999 = 77762223;$$
$$77777 \times 99999 = 7777622223;$$
$$777777 \times 999999 = 777776222223;$$
$$7777777 \times 9999999 = 77777762222223;$$
$$77777777 \times 99999999 = 7777777622222223;$$
$$777777777 \times 999999999 = 777777776222222223$$

21. Un numero del tipo $n5$ si può pensare come $n \times 10 + 5$. Pertanto
$$n5^2 = (n \times 10 + 5)^2 = n^2 \times 100 + n \times 100 + 25 =$$
$$= (n^2 + n) \times 100 + 25 = n \times (n + 1) \times 100 + 25$$
Quindi la regola è: un numero che finisce per 25 ed ha come prime cifre il risultato del prodotto fra il numero formato dalle cifre che precedono il 5 e il successivo.
Così, poiché $3 \times 4 = 12$, avremo $35^2 = 1225$;
poiché $12 \times 13 = 156$, $125^2 = 15625$;
e poiché $123 \times 124 = 15252$, avremo $1235^2 = 1525225$.
22. Si ha: $34^2 = 1156$, $334^2 = 111556$, $3334^2 = 11115556$.
23. Il numero è formato da n 1, $(n - 1)$ 5 e un 6.
24. Si ha: $67^2 = 4489$, $667^2 = 444889$, $6667^2 = 44448889$.
25. Il numero è formato da n 4, $(n - 1)$ 8 e un 9.
26. a) Abbiamo $\left(10^{215}+1\right)^2 = 10^{430} + 2\times10^{215} + 1$, quindi il numero ha solo 3 cifre non nulle la cui somma è 1+2+1=4;
b) $\left(10^{512}+3\right)^2 = 10^{1024} + 6\times10^{512} + 9$, le cui uniche tre cifre diverse da zero hanno somma pari a $1 + 6 + 9 = 16$;
c) $\left(10^{1234}+2\right)^2 = 10^{2468} + 4\times10^{1234} + 4$, le cifre non nulle hanno somma $1 + 4 + 4 = 9$.
27. Abbiamo
$$\left(10^6+1\right)^2 = 10^{12} + 2\times10^6 + 1 = 1000002000001;$$
$$\left(10^6+1\right)^3 = \left(10^6+1\right)^2 \times\left(10^6+1\right) = \left(10^{12}+2\times10^6+1\right)\times\left(10^6+1\right) =$$
$$= 10^{18} + 2\times10^{12} + 10^6 + 10^{12} + 2\times10^6 + 1 =$$
$$= 10^{18} + 3\times10^{12} + 3\times10^6 + 1 = 1000003000003000001$$

28. Abbiamo
$$2000000002 = 2\times10^9 + 2 = 2\times\left(10^9+1\right),$$
quindi

$$2000000002^2 = \left[2\times\left(10^9+1\right)\right]^2 = 4\times\left(10^9+1\right)^2 =$$
$$= 4\times\left(10^{18}+2\times10^9+1\right) = 4\times10^{18}+8\times10^9+4 =$$
$$= 4000000008000000004$$

29. Sottraendo $10d + u - (10u + d)$, otteniamo $9 \times (d - u)$. poiché d ed u sono cifre il numero non può superare 81. L'unico cubo divisibile per 9 e minore di 81 è 27. Ciò significa che si ha: $d - u = 3$, quindi i numeri cercati sono tutti quelli la cui cifra delle decine è 3 unità più grande di quella delle unità, cioè i numeri: 96, 85, 74, 63, 52, 41 e 30, che sono 7 in tutto. La risposta corretta è D.
30. Dal fatto che VYX e VVW sono consecutivi, segue che X=4 e W=0, mentre V è la cifra successiva a Y. Poiché VYZ e VYX sono numeri consecutivi, vuol dire che Z = 3. Da quanto detto e dal fatto che rimangono da assegnare solo le cifre 1 e 2, abbiamo Y = 1, V = 2. Infine
$$XYZ = [413]_5 = 4 \times 5^2 + 1 \times 5 + 3 = 108.$$
31. $R_{24} = 10^{23} + 10^{22} + \ldots + 10 + 1$, può anche scriversi nel modo seguente:
$1111 \times 10^{20} + 1111 \times 10^{16} + 1111 \times 10^{12} + 1111 \times 10^8 + 1111 \times 10^4 + 1111$. Quindi se dividiamo per $R_4 = 1111$, il risultato sarà
$$10^{20} + 10^{16} + 10^{12} + 10^8 + 10^4 + 1$$
che è un numero di 21 cifre, che sono solo zero e uno. Gli uno sono ovviamente in numero di 6, quindi gli zeri sono in numero di 15.
32. Il numero cercato è del tipo *aabb*, che in forma posizionale si può scrivere
$$1000\times a+100\times a+10\times b+b = 1100\times a+11\times b = 11\times(100a+b)$$
Quindi è un numero multiplo di 11. D'altro canto deve essere il prodotto di due numeri interi consecutivi. Cioè uno dei numeri 11, 22, 33, …, 99. Si verifica facilmente che gli unici accettabili sono:
$$33 \times 34 = 1122;\ 66 \times 67 = 4422 \text{ e } 77 \times 78 = 9900.$$
33. I numeri successivi, sono, come è facile capire:

39, 49, …, 99, 199, 299, … 1999, 2999, …

Vediamo subito che 49 è un quadrato perfetto. A partire da 199, i numeri sono tutti i precedenti di un multiplo di una potenza di 10, che non possono essere quadrati perfetti. La risposta è pertanto 49.

34. Un numero palindromo si indica simbolicamente con *abc…cba*. Se il numero ha più di due cifre, per esempio 4, esso risulta divisibile per 11. Infatti il numero *abba* verifica il criterio di divisibilità per 11, dato che $(a + b) - (b + a) = 0$. Lo stesso vale aumentando le cifre, sempre rimanendo pari di numero. Quindi bisogna solo controllare se vi sono numeri palindromi primi di due cifre, ovviamente l'unico è 11, perché anche gli altri, 22, 33, .., 99, sono tutti divisibili per 11. Pertanto la risposta corretta è A

35. Un numero di due cifre si indica simbolicamente con *ab*, che grazie alla notazione posizionale si può scrivere anche $10a + b$. Effettuando le operazioni richieste sommiamo $a \times b + a + b$. Dobbiamo quindi stabilire quando si ha:
$$a \times b + a + b = 10a + b.$$
Il che significa
$$a \times b + a + b - 10a - b = 0, \text{ cioè } a \times b - 9a = 0,$$
o ancora
$$a \times (b - 9) = 0.$$
Nei numeri interi vale il cosiddetto principio di annullamento del prodotto, cioè se un prodotto fa zero, come in questo caso, vuol dire che uno almeno dei due fattori deve essere zero. Ovviamente in questo caso a non può essere zero, perché è la cifra delle decine, deve perciò essere zero $b - 9$, cioè deve essere $b = 9$. a questo punto a può essere qualsiasi cifra, cioè uno dei 9 valori: 1, 2, …, 9. Quindi i numeri cercati sono 19, 29, 39, …, 99, cioè sono dieci. Verifichiamo per il numero 19. Si ha: $1 \times 9 + 1 + 9 = 19$.

36. L'anno di nascita di Giulio è 19*ab*, la somma delle cui cifre è $10 + a + b$. La sua età è 99 – *ab*, cioè $99 - (10a + b)$. Deve perciò essere $10 + a + b = 99 - (10a + b)$, cioè

$11a+2b = 89$. Essendo il secondo membro un numero dispari, affinché anche il primo membro sia dispari a deve essere una cifra dispari. Poiché la somma deve fare 89, a deve essere minore di 9, inoltre, dato che al massimo b può essere 9, $11a \geq 89 - 18 = 71$, quindi a, può essere solo 7. E in effetti $a = 7$ e $b = 6$, forniscono che Giulio è nato nel 1976, nel 1999 ha 23 anni e $1 + 9 + 7 + 6 = 23$.

37. Se scriviamo il numero 45 in base 2 avremo:
$$45 = 32 + 8 + 4 + 1 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = [101101]_2$$
quindi restano senz'acqua, quelli riferiti alle cifre 0, cioè B ed E.

38. I numeri dati sono tutte potenze di 6, quindi bisogna scrivere 11255 in base 6. Ora
$$11255 = 1 \times 7776 + 3479.\ 3479 = 2 \times 1296 + 887.$$
$$887 = 4 \times 216 + 23.\ 23 = 3 \times 6 + 5.$$
Quindi abbiamo $11255 = [124035]_6$. Le risposte sono perciò: a) quelle da 36; b) 2; c) 5.

39. Dobbiamo scrivere 104734 in base 7. Poiché
$$7^5 = 16807 \text{ e } 7^6 = 117649 > 104734,$$
abbiamo
$$104734 = 6 \times 16807 + 3892;$$
$$3892 = 1 \times 2401 + 1491;$$
$$1491 = 4 \times 343 + 119;$$
$$119 = 2 \times 49 + 21;\ 21 = 3 \times 7.$$
Infine $104734 = [614230]_7$, perciò le risposte sono:
a) $7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = 19607$; b) 6; c) 0

40. Indichiamo con $x1$, $x2$, $x3$ e $x4$ il peso di ciascuna moneta in ogni sacchetto. Avremo così
$$10 \times x1 + 30 \times x2 + 90 \times x3 + 270 \times x4 = 950$$
ossia
$$x1 + 3 \times x2 + 9 \times x3 + 27 \times x4 = 95$$
Il che equivale a scrivere 95 in base 3, cioè
$$95 = 27 \times 3 + 9 \times 1 + 3 \times 1 + 2$$
Quindi i pesi saranno 30, 10, 10 e 20 *g*.

41. Abbiamo la seguente catena di operazioni.

$$a \xrightarrow{\times 2} 2a \xrightarrow{+5} 2a+5 \xrightarrow{\times 5} 10a+25 \xrightarrow{+10} 10a+35$$

$$\xrightarrow{+b} 10a+b+35 \xrightarrow{\times 10} 100a+10b+350 \xrightarrow{+c}$$

$$\xrightarrow{+c} 100a+10b+c+350 \xrightarrow{\times 10}$$

$$\xrightarrow{\times 10} 1000a+100b+10c+3500 \xrightarrow{+d}$$

$$\xrightarrow{+d} 1000a+100b+10c+d+3500$$

Se perciò togliamo 3500 dal numero comunicato troviamo il numero di partenza scritto in forma posizionale.

42. Abbiamo la seguente catena di operazioni.

$$a \xrightarrow{\times 5} 5a \xrightarrow{+8} 5a+8 \xrightarrow{\times 2} 10a+16 \xrightarrow{+b} 10a+16+b$$

$$\xrightarrow{\times 0} 100a+10b+160 \xrightarrow{+12} 100a+10b+172$$

$$\xrightarrow{+c} 100a+10b+c+172 \xrightarrow{\times 2} 200a+20b+2c+344$$

$$\xrightarrow{+6} 200a+20b+2c+350$$

$$\xrightarrow{\times 5} 1000a+100b+10c+1750$$

$$\xrightarrow{+d} 1000a+100b+10c+d+1750$$

Se perciò togliamo 1750 dal numero comunicato troviamo il numero di partenza scritto in forma posizionale

43. No, per esempio non vale se $a = 4$, $b = 5$.
44. La congettura è che la somma dei primi n numeri dispari consecutivi sia il quadrato di n. Dato che $73 = 2 \times 37 - 1$, vuol dire che 73 è il trentasettesimo numero dispari, quindi
$$1 + 3 + \ldots + 73 = 37^2 = 1369.$$
45. Da quanto detto, visto che $2025 = 45^2$, vuol dire che n è il quarantacinquesimo numero dispari, cioè $2 \times 45 - 1 = 89$.
46. La regola sembra che sia: *suddividiamo i numeri dispari in gruppi di* 1, 2, 3, …, *n*, *allora la somma di ciascuno di questi gruppi è il cubo di quanti sono gli addendi.*
Poiché 381 + 383 + … + 419 sono il ventesimo gruppo fra quelli costruiti, la somma sarà
$$20^3 = 8000.$$
47. Poiché $4096 = 16^3$, gli addendi sono 16. Il primo di essi è 136.

48. Abbiamo:

$$1428 \times 7 + 4 = 10^4;$$
$$14285 \times 7 + 5 = 10^5;$$
$$142857 \times 7 + 1 = 10^6;$$
$$1428571 \times 7 + 3 = 10^7;$$
$$14285714 \times 7 + 2 = 10^8;$$
$$142857142 \times 7 + 6 = 10^9;$$
$$1428571428 \times 7 + 4 = 10^{10}.$$

49. Si ha:

$$\begin{aligned}&\left(10^n+9\right)^2=10^{2n}+18\times10^n+81=\\&=10^{2n}+\left(10+8\right)\times10^n+80+1= \quad .\\&=10^{2n}+10^{n+1}+8\times10^n+80+1\end{aligned}$$

Quindi le cifre diverse da zero sono:

$$1 + 1 + 8 + 8 + 1 = 19.$$

50. Si ha: $\left(10^n+m\right)^2=10^{2n}+2\times m\times10^n+m^2$. Verifichiamo per alcuni valori di m cosa accade se $m = 5$

$$\left(10^n+5\right)^2=10^{2n}+10\times10^n+25=10^{2n}+10^{n+1}+20+5$$

la somma delle cifre è 1 + 1 + 2 + 5 = 9. Aumentiamo m, tenendo conto dell'esercizio precedente:

$$\left(10^n+8\right)^2=10^{2n}+16\times10^n+64=10^{2n}+10^{n+1}+6\times10^n+60+4$$

la somma delle cifre è: 1 + 1 + 6 + 6 + 4 = 18. Quindi il valore cercato è 8.

51. Si ha:

$$\left(10^{2n}+10^n+1\right)^2=10^{4n}+10^{2n}+1+2\times10^{3n}+2\times10^{2n}+2\times10^n$$

La somma cercata è perciò 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9.

52. Cominciamo ad effettuare qualcuna delle somme.

$1+11 \to 12+111 \to 123+1111 \to 1234+11111 \to 12345.$

Come si vede stiamo ottenendo le cifre ordinate in modo crescente. Ciò accadrà finché sommeremo il numero formato da nove 1, ottenendo così 123456789. Sommando adesso il numero con dieci 1, avremo: 1234567900. Aggiungendo il successivo numero otterremo 12345679011 e poi ancora 123456790122 e 1234567901233. Non è difficile capire che il numero finale sarà formato da 123456790 che si ripete 10 volte e poi da 1234557. Perciò in complesso ci sono undici 1.

53. Indichiamo con a un numero scivoloso che abbia n cifre, allora esso si può scrivere come $b + c$ e $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{a}{10^{n+1}}$.

Possiamo allora scrivere:

$$\frac{b+c}{bc}=\frac{a}{10^{n+1}} \Rightarrow \frac{a}{bc}=\frac{a}{10^{n+1}} \Rightarrow bc=10^{n+1}$$

Quindi basta trovare due numeri il cui prodotto è una potenza di 10 e costruiamo i nostri numeri scivolosi. Per esempio se $b = 2$ e $c = 50$, allora $b \times c = 100$, $a = b + c = 52$ ed effettivamente $\frac{1}{2}+\frac{1}{50}=\frac{52}{100}=0{,}52$. Un altro esempio può essere: $b = 4$ e $c = 25$, $b \times c = 100$, $a = b + c = 29$ e

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{25}=\frac{29}{100}=0{,}29$$

54. Dobbiamo scrivere 66035 in base 5. Poiché

$$5^6 = 15625 \text{ e } 5^7 = 78125,$$

abbiamo

$$66035 = 4 \times 5^6 + 3535;\ 3535 = 1 \times 5^5 + 410;$$
$$410 = 3 \times 5^3 + 35;\ 35 = 1 \times 5^2 + 10;\ 10 = 2 \times 5.$$

Quindi $66035 = [4103120]_5$. Pertanto le risposte sono: a) 5; b) Lunedì e Venerdì; c) 1; d) 11

55. La somma è ovviamente multipla di 1259, quindi dobbiamo scrivere 58626594/1259 = 46566 in base 3. Ora

$$46566 = 2 \times 3^9 + 7200;\ 7200 = 1 \times 3^8 + 639;$$
$$639 = 2 \times 3^5 + 153;\ 153 = 1 \times 3^4 + 72;$$
$$72 = 2 \times 3^3 + 18;\ 18 = 2 \times 3^2.$$

Quindi $46566 = [2100212200]_3$. Perciò le risposte sono: a) 2; b) $1259 \times 3^9 = 24780897$; c) 4: primo, secondo, settimo e ottavo.

56. Consideriamo per esempio il numero
$$[1111111]_2 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$
Dato che $4 = 2^2$ la precedente somma si può scrivere anche
$$2^6 + 2^4 \times (2 + 1) + 2^2 \times (2 + 1) + (2 + 1) =$$
$$= 4^3 + 4^2 \times 3 + 4 \times 3 + 3 = [1333]_4.$$
57. Si raggruppano le cifre a tre a tre a partire da destra e si sostituisce a ciascuna coppia il valore decimale. Per esempio $[1101111001]_2 \to 1(101)(111)(001) \to [1571]_8$
58. No, per esempio $[10]_4 = [100]_2$
59. No, per esempio $[10000]_{16} = [65536]_{10}$

Il calcolo veloce

1. Tenuto conto che
$$0^3 = 0,\ 1^3 = 1,\ 2^3 = 8,\ 3^3 = 27,\ 4^3 = 64,\ 5^3 = 125,$$
$$6^3 = 216,\ 7^3 = 343,\ 8^3 = 512,\ 9^3 = 729$$
i numeri cercati sono quelli che finiscono per 0,1,4,5,6,9.
2. Tenuto conto dell'esercizio precedente, la risposta è no.
3. Abbiamo:
$$221 : 0{,}5 = 221 \times 2 = 442;\ 123 : 0{,}25 = 123 \times 4 = 492;$$
$$345 : 0{,}125 = 345 \times 8 = 2760.$$
4. Dato che 3 cucchiai pesano quanto un coltello e una forchetta, possiamo dire che 3 cucchiai pesano anche quanto due cucchiai (= un coltello) e una forchetta, cioè un cucchiaio pesa quanto una forchetta, quindi 40 gr. Ma allora 3 cucchiai pesano 120 gr., cioè quanto un coltello e una forchetta, quindi un coltello pesa 80 gr. Infine un mestolo pesa 40 gr. + 80 gr, cioè 120 gr.
5. Dato che ricevendo 8 pecore dal secondo pastore, il primo ne avrà lo stesso numero, vuol dire che il primo pastore ha 16 pecore in meno dell'altro. Quindi l'altro pastore, con 8 pecore in più si troverebbe ad avere 16 + 16 = 32 pecore in più del primo e così facendo ne avrebbe il doppio dell'altro. Questo doppio sarebbe perciò 64. Perciò vuol dire che il secondo pastore ha 64 – 8 = 56 pecore, mentre il primo ne ha 32 + 8 = 40 pecore.
6. La prima informazione equivale a dire che la somma deve essere divisa in 3 parti uguali, una delle quali, di € 20,00 la paga il primo, l'altra, di € 40,00 è pagata dagli altri ragazzi. La seconda informazione invece equivale a dire che la somma si divide in 4 parti, di cui il secondo paga una parte, cioè € 15,00. Infine l'ultima informazione equivale a dire che la somma è divisa in 5 parti, una delle quali, di € 12,00, la paga il terzo. Pertanto il quarto paga
$$€\ (60{,}00 - 20{,}00 - 15{,}00 - 12{,}00) = €\ 13{,}00.$$

7. Dato che a Matilde mancano 2 franchi e che la somma di Matteo non è sufficiente a integrare questa mancanza, vuol dire che Matteo ha meno di 2 franchi. Dato che ha un numero intero di franchi, vuol dire che ha 1 franco. Perciò il CD costa 48 franchi.
8. Tom ha certamente più di 2 × 5 = 10 farfalle. Per avere il minimo dobbiamo supporre che delle 6 scatole che ne contengono almeno 4, due sono quelle che ne contengono 5 e le altre quattro ne contengono il minimo, cioè 4. E siamo così a 10 + 4 × 4 = 26 farfalle. Sempre per minimizzare supponiamo che le 8 scatole che ne contengono almeno due, sono formate dalle sei già considerate e da altre due che ne contengono esattamente 2. Siamo così a 26 + 2 × 2 = 30 farfalle. Infine le rimanenti tre scatole contengono una farfalla, per un totale minimo di 30 + 3 = 33 farfalle.
9. Se $a + b = 12$, e $a - b = 2$, vuol dire che la somma di questi due numeri, $(a + b) + (a - b) = 2a = 14$, è il doppio del maggiore. Quindi i numeri sono 14/2 = 7 e 12 – 7 = 5. La tabella diviene perciò

$$\boxed{6 \quad \cancel{7} \quad 29 \quad 4 \quad 13 \quad \cancel{5} \quad 2 \quad 8 \quad 9}\,.$$

Di numeri interi il cui prodotto fa 32 e la cui somma fa 12, facilmente troviamo 4 e 8.

$$\boxed{6 \quad \cancel{7} \quad 29 \quad \cancel{4} \quad 13 \quad \cancel{5} \quad 2 \quad \cancel{8} \quad 9}\,.$$

Fra i numeri il cui prodotto è 78, la differenza 7 si ha per 13 e 6.

$$\boxed{\cancel{6} \quad \cancel{7} \quad 29 \quad \cancel{4} \quad \cancel{13} \quad \cancel{5} \quad 2 \quad \cancel{8} \quad 9}\,.$$

Dei rimanenti numeri, è facile verificare che 29 = 3 × 9 + 2. Quindi alla fine rimane solo il 2.

$$\boxed{\cancel{6} \quad \cancel{7} \quad \cancel{29} \quad \cancel{4} \quad \cancel{13} \quad \cancel{5} \quad 2 \quad \cancel{8} \quad \cancel{9}}$$

10. Se i 12 euro rimasti sono un terzo di quello che aveva, vuol dire che prima che ne perdesse un terzo aveva 12 × 3 = 36 euro. Questi rappresentano i due terzi di quello che aveva all'inizio, quindi la somma cercata è (36×3)/2 = 54.

11. 5 anni fa ciascuno dei 7 figli aveva 5 anni in meno, quindi tutti e cinque avevano 35 anni in meno, perciò c'erano 35 candeline in meno. Dato che in questo modo erano la metà di quest'anno, vuol dire che erano proprio 35. quindi quest'anno saranno accese 70 candeline. Cioè i figli avranno 10 anni in testa, e in effetti cinque anni fa avevano 5 anni a testa.
12. La somma delle sei facce, compresa quella visibile deve essere, per quanto detto, 3 × 7 = 21, se eliminiamo il 4, sarà perciò 21 – 4 = 17.
13. Dato che la somma delle prime due cifre è 17, le uniche possibilità sono 89 oppure 98. Allo stesso modo visto che la somma della seconda e terza cifra, così come della terza e quarta, è 15, le possibilità divengono 8969 oppure 9878. Poiché la somma delle ultime due cifre è 9, le possibilità divengono 89690 oppure 98781. a questo punto però la seconda alternativa non verifica la condizione per cui la somma della prima e ultima cifra è 8. Quindi il CAP della città di Ennio è 89690.
14. Le fette sono 8, quindi ciascuno riceve 8/3 di fetta. Ciò significa che il primo ha ceduto al terzo solo (3 – 8/3) = 1/3 di fetta, mentre il secondo ne ha cedute (5 – 8/3) = 7/3. Pertanto il primo dovrà ricevere 1 moneta e il secondo 7.
15. Le 7 caramelle rimaste per Giovanni vengono fuori dal fatto che Matteo ne ha mangiata una e presone metà, cioè 7 per sé. Quindi Matteo ha trovato 15 caramelle. Con lo stesso ragionamento Luca ne ha trovate 2 × 15 + 1 = 31 e Marco 2×31 + 1 = 63.
16. Dato che Enrico e Simonetta hanno 47 anni insieme e che Enrico è più vecchio di 5 anni, vuol dire che Enrico ha 26 anni e Simonetta 21. Ciò significa anche che gli altri 4 insieme hanno 137 – 47 = 90 anni insieme. In particolare i due maschi hanno insieme 50 anni, le donne dieci in meno, cioè 40. Se la più giovane fosse Simonetta, Chiara dovrebbe avere 21 + 4 = 25 anni e Marina 40 – 25 = 15, che

non è possibile, perché così sarebbe più giovane Marina. Quindi Chiara avrà 22 anni e Marina 18. Ma allora Angelo avrà 27 anni e Guido 23.

17. Se alla fine aveva € 16,00, vuol dire che prima ne aveva € 8,00 e l'avaro glieli ha raddoppiati. Ma ancora prima gli aveva tolto € 16,00, perciò ne aveva € 24,00. Quindi ragionando a ritroso la catena completa è la seguente:
$$16 \xrightarrow{/2} 8 \xrightarrow{+16} 24 \xrightarrow{/2} 12 \xrightarrow{+16} 28$$
$$\xrightarrow{/2} 14 \xrightarrow{+16} 30 \xrightarrow{/2} 15$$
Quindi all'inizio l'ingenuo aveva 15 euro.
18. Dato che Giacomo alla fine ha 24 palline e ha perso, queste sono la metà di quelle che aveva, perciò prima di giocare ne aveva 48 e le 24 palline perse sono state equamente divise tra gli altri due, che perciò ne avevano ciascuno 24–12 = 12. Dopo la seconda partita perciò la situazione era (12, 12, 48). Le 12 di Giovanni dopo la seconda partita sono la metà di quelle che aveva, 24, e gli altri due ne hanno vinte 6 a testa. Perciò prima della seconda partita le palline erano (6,24,42). Le 6 di Aldo sono quindi la metà di quante ne aveva all'inizio, 12, che sono state divise fra gli altri due. Quindi all'inizio la situazione era: (12,21,39).
19. Visto che dividere per 0,5 è lo stesso che moltiplicare per 2, dobbiamo cercare le uniche cifre che moltiplicate per 2 forniscono un numero che finisce per zero. Esse sono 0 oppure 5
20. Abbiamo
$31 \times 29 = (30 + 1) \times (30 - 1) = 30^2 - 1^2 = 900 - 1 = 899$;
$22 \times 18 = (20 + 2)\ x\ (20 - 2) = 202 - 22 =)\ 400 - 4 = 396$;
$14 \times 16 = (15 - 1) \times (15 + 1) = 15^2 - 1^2 = 225 - 1 = 224$;
$44\times 46 = (45 - 1) \times (45 + 1) = 45^2 - 1^2 = 2025 - 1 = 2024$;
$23 \times 27 = (25 - 2) \times (25 + 2) = 25^2 - 2^2 = 625 - 4 = 621$.
21. Poiché $30^2 = 900 < 1369 < 1600 = 40^2$, allora $1369 = 33^2$ oppure 37^2, è più probabile il secondo perché 1369 è più vicino a 1600, in effetti è così.

Poiché $70^2 = 4900 < 5329 < 6400 = 80^2$, avremo $5329=73^2$ o 77^2, stavolta è più probabile il primo.
Infine 90^2=8100 < 8836 < 10000 = 1002, avremo $8836=94^2$.

22. Poiché 9 × E è un numero che finisce per E, vuol dire che E=5. Ma allora 9 × 5 = 45, quindi scriviamo 5 e riportiamo 4, cioè 9 × N + 4 finisce per N. Quindi N = 2 oppure N = 7. Se N = 2, avremo 9 × O + 2 = 2I, cioè O =3, I = 9 e va bene. Se N = 7, deve essere 9 × O + 6 = 7I, cioè O = 8 e I =8, non è possibile Infine. 9 × 325 = 2925.
23. Abbiamo 3 quadrati con una cifra (1, 4, 9), 6 con due cifre (16, 25, …, 81), 22 con 3 cifre (100, 121, …, 961). In questo modo abbiamo scritto perciò
$$3 + 2 \times 6 + 3 \times 22 = 81$$
cifre. Dobbiamo quindi scriverne altre 19, usando quadrati con 4 cifre. La cifra cercata è perciò la terza del quinto di questi numeri, cioè di $36^2 = 1296$. La cifra è quindi 9.
24. Osserviamo che la cifra delle unità di un prodotto si ottiene semplicemente moltiplicando fra loro le cifre delle unità dei singoli fattori. Così
$$2003^1 = 2003,\ 2003^2 = \_\_\_9,\ 2003^3 = \_\_\_7,\ 2003^4 = \_\_\_1$$
A questo punto ritroveremo sempre le stesse cifre delle unità (3, 9, 7, 1). Questa sequenza si associa a ogni esponente che si comporta come 1, 2, 3 e 4, ossia basta vedere il resto della divisione di 2003 per 4, per stabilire qual è la cifra. Poiché 2003 = 4 × 500 + 3, vuol dire che 2003^{2003} ha la stessa cifra delle unità di 2003^3, cioè 7.
25. Osserviamo che in ogni riga l'ultimo numero è un quadrato perfetto e il primo è quindi, il successivo di un quadrato perfetto. In particolare ogni riga inizia da $n^2 + 1$ e finisce a $(n+1)^2$. Individuiamo allora i quadrati fra cui sta 2007.
$$44^2 < 2007 < 45^2$$
Quindi 2007 sta nella riga che inizia con $44^2 + 1 = 1937$ e finisce con $45^2 = 2025$. Poiché 2025 = 2007 + 18, vuol dire che 2007 si trova 18 colonne a sinistra di quella su cui

sta 2035. Anche i numeri che individuano le colonne sono quadrati perfetti. Perciò quello che individua 2007 è

$$(45 - 18)^2 = 27^2 = 729.$$

Infine le coordinate di 2007 sono (1937, 729).

26. I sorteggi possibili sono 6: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Vediamo cosa accade in ognuno di questi 6 casi:

Estrazione	A	B	C	Monete rimaste
ABC	1+1=2	2+4=6	3+12=15	18–1–4–12=1
ACB	1+1=2	2+8=10	3+6=9	18–1–8–6=3
BAC	1+2=3	2+2=4	3+12=15	18–2–2–12=2
BCA	1+4=5	2+2=4	3+6=9	18–4–2–6=6
CAB	1+2=3	2+8=10	3+3=6	18–2–8–3=5
CBA	1+4=5	2+4=6	3+3=6	18–4–4–3=7

Pertanto le risposte sono: a) *CAB*; b) *BAC*; c) Impossibile

I divisori dei numeri interi

1. I divisori si trovano ovviamente a coppie tali che il loro prodotto riproduca il numero. Così, dato che il numero è 120, avremo
(1,120), (2,60), (3,40),(4,30), (5,24), (6,20), (8,15),(10,12). Osserviamo che in ogni coppia il primo numero va ad aumentare e il secondo a diminuire, quindi visto che 11 non è un divisore, possiamo concludere che i divisori sono solo quelli scritti. Per un totale di $8 \times 2 = 16$.
2. Un numero è divisibile per 3, solo se la somma delle sue cifre lo è. Pertanto il primo multiplo di 3 maggiore di 2000 è $2001 = 3 \times 667$. Analogamente l'ultimo multiplo di 3 minore di 4000 è $3999 = 3 \times 1333$. Pertanto i multipli sono tanti quanti i numeri da 667 a 1333. Cioè
$$1333 - 667 + 1 = 667.$$
3. Un numero divisibile per 4 e per 5 è divisibile per 20, quindi anche per 10, cioè ha cifra delle unità uguale a zero. Perciò la cifra delle unità del numero successivo è 1.
4. Dato che alla fine su ogni albero ci sono lo stesso numero di passeri, vuol dire che il totale è un multiplo di 5. Il più grande multiplo di 5 minore di 30 è 25. Poiché alla fine almeno 5 passeri sono sul primo salice, vuol dire che i passeri complessivamente sono proprio 25. Quindi prima che vi andassero sul primo salice non c'erano passeri e perciò all'inizio c'era un solo passero, che poi è passato sul secondo salice. Su questo alla fine ci sono 5 passeri, cioè dopo che abbiamo eseguito le operazioni + 1 (dal primo salice) e –2 (al terzo salice). Ciò vuol dire che all'inizio c'era un passero in più, cioè 6. Ma il risultato delle operazioni eseguite sugli altri alberi è sempre lo stesso
$$(+2 - 3 = +3 - 4 = +4 - 5 = -1)$$
quindi su ciascun salice rimanente c'erano 6 passeri. Infine la situazione iniziale era: (1, 6, 6, 6, 6).

5. Alla sera del nono giorno son state consumate 7 × 2 × 9 = 131 barrette, ne sono perciò rimaste 168 – 131 = 37, che devono consumare in tre ragazzi a due a testa al giorno, cioè ne andranno via 6 al giorno. Quindi, dato che 37 = 36 + 1, vuol dire che l'ultima barretta la mangerà uno solo dei tre, o la divideranno in parti uguali il settimo giorno dopo la partenza dei cugini. Quindi sedici giorni dopo l'arrivo dei cugini, che sarà un lunedì. Dato che dopo 7 giorni e dopo 15 sarà ancora domenica.
6. Indichiamo con 0 = 17, la posizione iniziale della pulce A, in questo modo la posizione iniziale della pulce B sarà 14. Costruiamo la seguente tabella in cui segniamo le posizioni delle pulci ad ogni secondo.

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	0	3	6	9	12	15	1	4	7	10	13	16	2	5
B	14	12	10	8	6	4	2	0	15	13	11	9	7	5

Quindi si incontrano dopo 13 secondi.
7. Se dai 52 pesci eliminiamo quelli che ha pescato nei primi tre e negli ultimi tre giorni, otteniamo

$$52 - 2 \times (1 + 2 + 3) = 40 \text{ pesci}$$

Poiché ha pescato 40 pesci pescandone 4 al giorno, vuol dire che lo ha fatto in 10 giorni. In totale perciò la vacanza è durata 10 + 6 = 16 giorni.
8. Dire che se togliamo una caramella le gialle sono un quarto delle verdi è lo stesso che dire che le verdi sono 3 volte le gialle. Dire che se aggiungiamo una caramella le gialle sono un quinto delle verdi è lo stesso che dire che le verdi sono 4 volte le gialle. Quindi le due caramelle ottenute sommando la caramella che aggiungiamo e quella che togliamo sono uguali alla differenza fra 1/3 e 1/4 delle verdi, cioè $\frac{1}{12}v = 2$. Quindi le verdi sono 12 × 2 = 24.
9. Se il doppio dei cioccolatini di Matteo sono meno di 31, vuol dire che essi sono meno di 16, perché 2 × 16 = 32; se

il triplo sono più di 31, vuol dire che sono più di 10, perché $3 \times 10 = 30$. Se aggiungiamo un cioccolatino e il doppio sono ancora meno di 31, vuol dire che sono meno di 15, perché $2 \times (15 + 1) = 32$; a questo punto se ne togliamo quattro è come se ne togliessimo tre a quanti ne aveva all'inizio, se il triplo sono ancora più di 31, dato che $3\times(13–3) = 30$, vuol dire che sono più di 13. L'unico numero intero che verifica questa proprietà è il 14.

10. Poiché $5b9$ è divisibile per 9, vuol dire che la somma delle cifre è divisibile per 9, cioè $14 + b$ è divisibile per 9. Ciò accade solo per $b = 4$. Allora $2a3 + 326 = 549$, implica che sia $a = 2$, perciò $a + b = 2 + 4 = 6$.
11. Osserviamo che 1000 è un multiplo di 8 e che tutti i multipli di 8 saranno scritti nella colonna II.
12. Gennaio ha 31 giorni, quindi i giorni 1, 8, 15, 22 e 29 cadono lo stesso giorno della settimana, così come i giorni 2, 9, 16, 23 e 30 e i giorni 3, 10, 17, 24 e 31. Ciò significa che giorno 1 non può essere né martedì né Sabato. Ma non può essere neanche Lunedì, perché allora Martedì sarebbe il 2 e ci sarebbero 5 martedì. Per lo stesso ragionamento non può essere neanche Domenica (martedì sarebbe il 3). Analogamente giorno 1 non può cadere neanche di Giovedì, perché allora il 3 sarebbe Sabato e quindi dovrebbero esservi 5 Sabato, né di Venerdì, il 2 sarebbe Sabato. Pertanto giorno 1 cade di Mercoledì e ci sono 5 Mercoledì, Giovedì e Venerdì, mentre ci sono 4 Lunedì, Martedì, Sabato e Domenica.
13. Consideriamo 256256, tanto il procedimento si può ripetere per qualsiasi numero del tipo *abcabc*. Possiamo scrivere $256256 = 256000 + 256 = 256 \times 1000 + 256 = 256 \times 1001$ Quindi ogni numero è divisibile sicuramente per 1001.
14. I divisori di un numero intero sono sempre accoppiati, per esempio i divisori di 6 sono 1 e 6, 2 e 3. Quindi la maggior parte dei numeri interi hanno un numero pari di divisori, gli unici che hanno un numero dispari di divisori sono i

quadrati perfetti, perché in questo caso una delle coppie è formata da elementi uguali. Per esempio i divisori di 4 sono 1 e 4, 2 e 2. Perciò i numeri cercati sono 7, tanti quanti i quadrati perfetti minori di 50.

15. Il numero è del tipo $h \times 999 = h \times (1000 - 1)$. h deve avere più di una cifra perché

$$\begin{array}{r} h000- \\ \underline{\quad h} \\ m99k \end{array}$$

Se h è di due cifre, $h = ab$, b deve essere ovviamente diverso da 1, si ha:

$$\begin{array}{r} ab000- \\ \underline{\quad ab} \\ ac9mk \end{array}$$

Quindi deve avere più di due cifre. $h = abc$. Si ha:

$$\begin{array}{r} abc000- \\ \underline{\quad abc} \\ abgfed \end{array}$$

Perché tutte le cifre siano diverse da 9, deve però essere $c \neq 1$, $b \neq 0$. Quindi il primo valore ammissibile è 112. In effetti

$$112 \times 999 = 111888$$

16. Poiché $225 = 3^2 \times 5^2$, possiamo scrivere diverse somme a 3 addendi, con i divisori di 225. Le uniche che danno luogo ad equivoci sono:

$$3 + 3 + 25 = 1 + 15 + 15 = 31$$

Solo nel primo caso c'è uno più vecchio, quella è la risposta.

17. Tenuto conto di quello che abbiamo possiamo cominciare a riempire qualche casella vuota

×	2				**7**	**5**
3	6					
12	**24**					60
			50			
6	**12**				42	
		99	110			
				8	56	

A questo punto possiamo riempire altre caselle vuote

×	2			**1**	7	5
3	6			**3**	**21**	**15**
12	24			**12**	**42**	60
			50			
6	12			**6**	42	**30**
		99	110			
8				8	56	

Adesso osserviamo che nella penultima riga entrambi i numeri, 99 e 110, sono multipli di 11, quindi abbiamo:

×	2	**9**	**10**	1	7	5
3	6	**27**	**30**	3	21	15
12	24	**108**	**120**	12	42	60
5	**10**	**45**	50	**5**	**35**	**25**
6	12	**54**	**60**	6	42	30
11	**22**	99	110	**11**	**77**	**35**
8	**16**	**72**	**80**	8	56	**40**

18. Intanto i genitori si levano le proprie scarpe, impiegando 1000 secondi. In questo tempo i figli hanno levato ciascuno 500 scarpe. Adesso i due genitori aiutano i tre figli a togliere le scarpe. Ogni secondo levano una scarpa a due figli, ogni due secondi ne levano 4, e i figli ne levano una ciascuno. Quindi ogni 2 secondi si levano complessiva-

mente 7 scarpe. I genitori operano in modo di levare a tutti lo stesso numero di scarpe, il che può farsi in 6 secondi, dato che essi levano 12 scarpe, 4 per ciascun figlio il quale toglie 3 delle sue scarpe. Quindi ogni 6 secondi ciascun figlio ha 7 scarpe in meno. Dato che ne avevano 500, e $500 = 7 \times 71 + 3$, vuol dire che in $71 \times 6 = 426$ secondi a ciascun figlio sono rimaste 3 scarpe. Per le rimanenti 9 scarpe servono altri 3 secondi. Totale $1000 + 426 + 3 = 1429$.

19. In genere due numeri consecutivi hanno somma delle loro cifre che differisce di 1, per esempio 73 e 74 hanno somme rispettive 10 e 11. Se però il numero più grande finisce per zero, ciò non accade. Per esempio 69 e 70 hanno somme uguali a 15 e 7. Quindi i numeri cercati devono essere di questa seconda categoria. Poiché entrambe le somme devono essere divisibili per 7, uno dei numeri deve essere 70…0, con un certo numero di zeri che dobbiamo individuare e 69…9, con tanti 9 quanti zeri ha il numero successivo. Ora $6+ 9 + \ldots 9$ è un multiplo di 7, la prima volta, per 69999, la cui somma delle cifre è appunto 42. Quindi i numeri cercati sono 69999 e 70000.
20. Il numero era xy, diviene poi $xy2$. In notazione posizionale possiamo scrivere: $10x + y$ e $100x + 10y + 2$. La differenza tra i due deve essere 335. tale differenza è $90x + 9y$. Deve perciò aversi
$$90x + 9y = 335 \Rightarrow 10x+ y = 37$$
cioè $y = 37 - 10x$. Gli unici valori accettabili, dato che sia x che y devono essere cifre sono $x = 3$, $y = 7$, quindi il numero cercato è 37. infatti $372 - 37 = 335$.
21. Poiché la somma delle cifre note è
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$
che è divisibile per 3, vuol dire che anche la cifra nascosta, x, deve essere divisibile per 3. Quindi le possibilità sono:
$$x = 0, 3, 6, 9.$$
22. Dobbiamo guardare il numero formato con le ultime 3 cifre. Per il criterio di divisibilità per 8 esso deve essere ap-

punto divisibile per 8. non è difficile verificare che nessuno dei numeri 078, 178, 278, …, 978 lo è, quindi il problema non ha soluzioni.

23. Chiamiamo n il fattore per cui moltiplicare. Dobbiamo avere perciò $4n + 7n + 9n = 120$, cioè $20n = 120$. Da cui $n = 6$. Perciò Jacopo ha ricevuto $6 \times 4 = 24$ ciliegie.
24. Entrano $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ persone complessivamente dai cinque cancelli. Quindi per stabilire da quale cancello entra una certa persona, basta dividere il numero per 15 e considerarne il resto. Poiché $2007 = 15 \times 133 + 12$, vuol dire che Raffaele è entrato dallo stesso cancello in cui è entrata la dodicesima persona, cioè il quinto cancello.
25. In un anno ci sono $34 \times 14 = 476$ giorni; poiché $476 = 8 \times 59 + 4$, ci sono 59 settimane e 4 giorni di un'altra settimana. Allora in due anni ci saranno 59×2 settimane e 8 giorni, cioè 119 settimane e quindi l'anno si ripeterà identico a quello di due anni prima. Infine la festa del pianeta sarà fra $476 \times 2 = 952$ giorni.
26. I dati ci dicono che, detto n il numero dei ragazzi, si ha:
$$12n = 16 \times (n - 2) \Rightarrow 3n = 4 \times (n - 2)$$
da cui facilmente segue che $n = 8$.
27. Dato che Alberto butta giù il triplo dei birilli di Barbara, la quale butta giù il doppio di quelli di Clara, vuol dire che il numero dei birilli buttati giù da Alberto è 6 volte quello di Clara. Quindi in totale sono stati buttati giù $(1 + 2 + 6) = 9$ volte il numero di birilli buttati giù da Clara. Cioè al massimo i tre hanno buttato giù un numero di birilli uguale al più grande multiplo di 9 contenuto in 2008, cioè $2007 = 9 \times 223$. Quindi Alberto al massimo ha buttato giù $6 \times 223 = 1338$ birilli.
28. I multipli di 5 minori o uguali a 1000 sono 200, dato che $1000 = 5 \times 200$; i multipli di 7 sono invece 142, poiché $1000 = 7 \times 142 + 6$. Poi ci sono i multipli di 5 e di 7, cioè di 35, che in questo modo conterremmo due volte, e sono

28, poiché $1000 = 35 \times 28 + 20$. Quindi i numeri cercati in totale sono: $200 + 142 - 28 = 314$.

29. Poiché $63 = 7 \times 9$, avremo
$$143 \times 63 = (143 \times 7) \times 9 = 1001 \times 9 = 9009.$$
30. Da quanto visto ovviamente n deve essere multiplo di 7.
31. Sempre con riferimento a quanto detto, basta che n sia un multiplo di 7 maggiore di 99. Per esempio $143 \times (7 \times 253) = 1001 \times 253 = 253253$.
32. Dal precedente esercizio si ha: $n = 123 \times 7 = 861$.
33. Sempre nell'ordine di idee degli esercizi precedenti, basta considerare 73 per un multiplo di 137; per esempio
$$73 \times 274 = 20002,\ 73 \times 411 = 30003,\ \ldots,$$
$$73 \times 1233 = 90009,\ \ldots,\ 73 \times 1369863 = 99999999.$$
O viceversa 137 per un multiplo di 73, per esempio $137 \times 146 = 20002$, e così via.
34. Il numero deve essere divisibile per 3 e per 11. Quindi la somma delle cifre deve essere divisibile per 3, cioè
$$8 + 1 + 1 + 0 + 5 + 8 + 2 + 9 + 4 + x + y = 38 + x + y$$
deve essere divisibile per 3.
O meglio $36 + 2 + x + y$ deve essere divisibile per 3; quindi $x + y + 2$ deve essere divisibile per 3. Dato che x e y sono cifre, tali somme vanno da un minimo di 2 a un massimo di 20. Quindi le possibilità sono
$$x + y = 1,\ x + y = 4,\ x + y = 7,$$
$$x + y = 10,\ x + y = 13,\ x + y = 16,\ x + y = 19.$$
Vediamo adesso la divisibilità per 11. Consideriamo le somme alternate:
$$8 + y + 0 + 8 + 9 + x = 25 + x + y \text{ e } 1 + 1 + 5 + 2 + 4 = 13.$$
Eseguiamo la differenza fra queste somme:
$$(25 + x + y) - 13 = 12 + x + y = 11 + (1 + x + y).$$
Per il criterio di divisibilità per 11, $1 + x + y$, deve essere divisibile per 11. Vediamo allora quali delle somme $(x + y)$ accettabili per la divisibilità per 3, verificano anche questa proprietà. Non è difficile vedere che ciò capita solo

per $x + y = 10$, dato che $1 + x + y = 11$. Quindi le cifre incognite debbono verificare la relazione $x + y = 10$.

35. Abbiamo:

$$19981998 = 1998 \times (10^4 + 1) = 2 \times 3^3 \times 37 \times 73 \times 137$$

quindi uno dei tre numeri deve essere 137, ma

$$135 \times 136 \times 137 > 19981998$$

Invece per la somma la risposta è positiva perché la somma di tre numeri consecutivi è un numero divisibile per 3, come lo è 19981998. I numeri sono:

$$6660665 + 6660666 + 6660667$$

36. Se il numero ha per divisori 35 e 77, ha anche 5, 7 e 11, perciò avrà anche $5 \times 11 = 55$. Ovviamente deve avere anche 1, l'ultimo divisore mancante è chiaramente il numero cercato, che è perciò il prodotto dei fattori primi contenuti nei suoi divisori. Cioè $5 \times 7 \times 11 = 385$.

37. Dobbiamo considerare solamente i quadrati perfetti. Cominciamo ad osservare che il quadrato di un numero primo, p^2, ha solo 3 divisori, $(1, p, p^2)$. Quindi l'unico che verifica quanto richiesto è 3^2. Inoltre ovviamente il numero 1 è uno di quelli cercati, perché è divisibile solo per se stesso e $1^2 = 1$. Consideriamo adesso i divisori dei quadrati non primi.

I divisori di 16 sono 5: (1, 2, 4, 8, 16), e $5^2 \neq 16$.

I divisori di 36 sono 9, (1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36), e $9^2 \neq 36$.

I divisori di 64 sono 7, (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64), e $7^2 \neq 64$.

I divisori di 81 sono 5, (1, 3, 9, 27, 81), e $5^2 \neq 81$.

38. Scriviamo $8n + 50$ nel seguente modo:

$$8n + 4 + 46 = 4 \times (2n + 1) + 46.$$

In questo modo abbiamo scritto $8n + 50$ come somma di un multiplo di $2n + 1$ e di un altro numero. Se $8n + 50$ è multiplo di $2n + 1$ anche 46 deve esserlo. Ora $46 = 2 \times 23$, quindi l'unica possibilità è che $23 = 2n + 1$, cioè $n = 11$. In questo caso infatti $8 \times 11 + 50 = 138 = 6 \times 23$ è multiplo di 23.

39. Poiché ogni numero è multiplo di se stesso, possiamo già eliminare 2116. Si ha $2004 \times 3 = 6012$, quindi anche questo è da eliminare.
    Analogamente $2122 \times 5 = 10610$ e $2942 \times 5 = 14710$.
    Quindi la risposta, dovendone essercene una corretta, è la D.
    Vediamo di capire perché 2740 è parofilo. Finendo per zero, qualunque suo multiplo finisce per zero. Inoltre la sua cifra delle decine è pari, quindi ogni suo multiplo avrà anch'esso tale cifra pari. Poiché un multiplo di 2740 è un multiplo di 274, che è appunto un numero pari, seguito da uno zero.
40. Dato che le ragazze sono il doppio dei maschi, tutti gli studenti sono in numero multiplo di 3. Se tutti i ragazzi avessero preso 8 punti, il punteggio totale più vicino a 156 dovrebbe essere $8 \times 21 = 162$, se avessero preso tutti 10, sarebbe stato $10 \times 15 = 150$. Ciò significa che tutti i ragazzi sono un multiplo di 3 compreso tra 15 e 21, cioè 18. Quindi i ragazzi sono 6 e le ragazze 12.
41. Sia n il numero pensato.
    Dividendolo per 3 abbiamo: $n = 3h + a$;
    dividendo per 4 avremo: $n = 4k + b$;
    dividendo per 5: $n = 5m + c$.
    Adesso moltiplichiamo le tre uguaglianze rispettivamente per 40, 45 e 36:
    $40n = 120h + 40a$; $45n = 180k + 45b$; $36n = 180m + 36c$.
    Sommiamo termine a termine:
    $$121n = 120h + 40a + 180k + 45b + 180m + 36c.$$
    Dato che possiamo anche scrivere $121n = 120n + 1$, avremo
    $$120n - 120h - 180k - 180m = 40a + 45b + 36c - n.$$
    Dato che il primo membro è divisibile per 60, anche il secondo deve esserlo. Pertanto la regola sarà: n è il resto della divisione di $40a + 45b + 36c$ per 60.
42. Tenuto conto dell'esercizio precedente. Sia

$$40 \times 2 + 45 \times 3 + 36 \times 4 = 359.$$

Dividiamo per 60, ottenendo quoziente 5 e resto 59, che è il numero cercato.

43. I divisori sono ovviamente 1, p, p^2, p^3, …, p^h, che sono appunto $h + 1$.
44. Se fosse falsa l'affermazione "Il numero è divisibile per h", sarebbe falsa anche "Il numero è divisibile per $2h$". Quindi le affermazioni fatte sui numeri da 2 a 15 devono essere vere. A questo punto saranno vere le affermazioni fatte su tutti i numeri composti da 18 in poi, perché composti appunto da numeri su cui l'affermazione è vera. Devono essere vere anche quelle sui numeri primi, perché le affermazioni false devono essere consecutive. Pertanto l'unica possibilità è che siano false le affermazioni "Il numero è divisibile per 16" e "Il numero è divisibile per 17".

Problemi indeterminati

1. Indichiamo con m e con p rispettivamente, quante mele e quante pere devono raccogliere. La relazione diventa perciò $300m + 200p \leq 7000$, cioè $3m + 2p \leq 70$. Inoltre, dato che ciascuno degli invitati deve scegliere, vuol dire che ci devono essere almeno 7 mele e almeno 7 pere. Consideriamo l'ipotesi dell'uguaglianza: $3m + 2p = 70$, da cui si ha:
$$m = \frac{70 - 2p}{3}$$
Le possibilità che verificano le condizioni del problema sono perciò le seguenti:

m	16	14	12	10	*8*
p	11	14	17	20	*22*
$m + p$	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*

Quindi la risposta è 31.
2. Dai dati del problema possiamo scrivere
$$9n + n = 7h + h \Rightarrow 10n = 8h \Rightarrow 5n = 4h$$
Ovviamente deve essere $n < 9$ e $h < 7$, quindi la soluzione è facilmente $n = 4$ e $h = 5$. le monete sono perciò in totale 40.
3. I quadrati di lato 1 sono ovviamente 20. Quelli di lato 2 sono invece 12, quelli di lato 3 sono 6 e quelli di lato 4 sono 2. pertanto, tenuto conto dei dati, posiamo scrivere:
$$20 \times 5 + 7 \times 2 = 12 \times x + 6 \times y \Rightarrow 114 = 12x + 6y$$
che si semplifica in
$$2x + y = 19 \Rightarrow y = 19 - 2x.$$
Poiché $x < y$, il massimo valore che può assumere x è 6, ma in questo caso $y = 7$, che non è possibile. Analogamente non è possibile $x = 5$. Sono perciò accettabili solo i seguenti valori: (4, 11), (3, 13), (2, 15), (1, 17).

4. Indichiamo i numeri scelti dalle ragazze con le iniziali dei loro nomi, *a* e *c*. Abbiamo allora:

$$\frac{1}{3}c\times\frac{1}{5}a=\frac{1}{5}c+\frac{1}{3}a\Rightarrow a\times c=3c+5a$$

che può anche scriversi:

$$a=\frac{3c}{c-5}=\frac{3c-15+15}{c-5}=3+\frac{15}{c-5}$$

ora gli unici valori che rendono la frazione un numero intero sono quelli per cui il denominatore è un divisore di 15 e *c* è maggiore di 5. Cioè

$c-5$	c	a
1	6	18
3	8	8
5	10	6
15	20	4

5. Indichiamo con x il numero di francobolli da € 0,60 e con y il numero di quelli da € 0,80. Deve aversi

$$0{,}60x + 0{,}80y = 6{,}60 \Rightarrow 3x + 4y = 33$$

cioè $x=\frac{33-4y}{3}=11-\frac{4}{3}y$. Quindi y deve essere un multiplo di 3, dato che in totale $x + y < 10$, l'unico valore accettabile è $x = 3$, $y = 6$.

6. Sia il numero *abc*, deve essere $abc - 1 = 9m$ e $abc + 1 = 8h$. sottraendo il secondo dal primo avremo: $8h - 9m = 2$, cioè

$$h=\frac{9m+2}{8}=\frac{8m+m+2}{8}=m+\frac{m+2}{8}$$

Il più piccolo multiplo di 8 è ovviamente lo stesso 8, in questo caso però $m = 6$ e $h = 7$, non forniscono numeri di 3 cifre: $9 \times 6 = 54$, $8 \times 7 = 56$. Il successivo multiplo invece va bene: $m = 14$, $h = 16$ forniscono $9 \times 14 = 126$ e $8 \times 16 = 128$. Il numero cercato è perciò 127.

7. Indichiamo i manzi con m e le vacche con v. Dobbiamo risolvere l'equazione $25m + 26v = 1000$, cioè
$$m = \frac{1000 - 26v}{25} = 40 - \frac{26}{25}v$$
Facilmente si vede che l'unica soluzione accettabile, che cioè rende m e v interi positivi è: $v = 25$, $m = 14$.

8. Siano le due età f e p. Il numero di 4 cifre è pf. La differenza delle età è invece: $p - f$. Quindi abbiamo:
$$100 \times p + f - (p - f) = 4289 \Rightarrow 99p + 2f = 4289$$
cioè
$$p = \frac{4289 - 2f}{99} = \frac{4257 + 32 - 2f}{99} = 43 + \frac{32 - 2f}{99}$$
La seconda frazione diventa un numero intero, per valori positivi di f, solo se è zero. Cioè solo se $32 = 2f \Rightarrow f = 16$. Quindi il figlio ha 16 anni e il padre 43. In effetti
$$4316 - (43 - 16) = 4289$$

9. Se $\frac{n-13}{5n+6}$ è riducibile lo sarà anche
$$\frac{5n+6}{n-13} = \frac{5n - 65 + 71}{n-13} = 5 + \frac{71}{n-13}$$
Il che accade solo se $n - 13$ ha qualche divisore in comune con 71, il quale però è un numero primo quindi l'unica possibilità è $n - 13 = 71$, ossia $n = 84$. Abbiamo così la frazione:
$$\frac{84-13}{5 \times 84 + 6} = \frac{71}{426} = \frac{1}{6}.$$

10. Sia $x + y + z + t = 45$. Imponendo le condizioni del problema abbiamo:
$$x + 2 = y - 2;\ 2z = t/2 \Rightarrow x = y - 4,\ t = 4z.$$
quindi:
$$y - 4 + y + z + 4z = 45 \Rightarrow 2y + 5z = 49$$

Ovviamente z deve essere un numero dispari. Abbiamo allora le seguenti possibilità :

x	y	z	t
18	22	1	4
13	17	3	12
8	12	5	10
3	7	7	14

11. Indichiamo i numeri con p_1, p_2, p_3. Le indicazioni del problema ci permettono di scrivere

$$p_1 \times p_2 \times p_3 = 7 \times (p_1 + p_2 + p_3)$$

Poiché i numeri sono primi, uno di essi deve essere per forza 7, sia per esempio p_1. La relazione diviene perciò:

$$7 \times p_2 \times p_3 = 7 \times (p_1 + p_2 + p_3) \Rightarrow p_2 \times p_3 = p_2 + p_3 + 7$$

che possiamo anche scrivere:

$$p_2 = \frac{p_3 + 7}{p_3 - 1} = \frac{p_3 - 1 + 8}{p_3 - 1} = 1 + \frac{8}{p_3 - 1}$$

Quindi il denominatore deve essere un divisore di 8, cioè 1, 2, 4 oppure 8. si ha:

p_2	p_3
9	2
5	3
3	5
2	9

Gli unici per cui entrambi i numeri sono primi sono:

$$p_3 = 3, p_2 = 5 \vee p_3 = 5, p_2 = 3.$$

12. Indichiamo le oche con c, le galline con g e i pulcini con p. Abbiamo allora le relazioni:

$$\begin{cases} 5c + g + \dfrac{p}{20} = 100 \\ c + g + p = 100 \end{cases}$$

da cui: otteniamo

$$\begin{cases} g = 100 - 5c - \dfrac{p}{20} \\ g = 100 - c - p \end{cases} \Rightarrow \cancel{100} - 5c - \frac{p}{20} = \cancel{100} - c - p \Rightarrow ,$$

$$\Rightarrow 4c = \frac{19}{20} p \Rightarrow c = \frac{19}{80} p$$

quindi p deve essere un multiplo di 80.

Scegliendo appunto p = 80, avremo c=19 e g=100–80–19=1.

Le successive soluzioni non sono ovviamente accettabili perché danno $p > 100$.

13. Traduciamo la domanda, indicando con n il numero da cercare: $221n + 65 = 195h$. Si ricava:

$$n = \frac{195h - 65}{221} = 5 \times \frac{19h - 13}{221}.$$

Il che significa che n è un multiplo di 5. Proviamo allora con questi numeri. Otteniamo subito

$$221 \times 5 + 65 = 1170 = 195 \times 6.$$

Quindi il numero cercato è 5.

14. Indichiamo il valore delle gemme espresso in monete con r per i rubini, z per gli zaffiri e p per le perle. Quanto detto equivale all'equazione:

$$5r + 8z + 7p + 92 = 7r + 9z + 6p + 62,$$

cioè $2r + z - p - 30 = 0$, o anche

$$r = \frac{p - z + 30}{2} \Rightarrow r = \frac{p - z}{2} + 15.$$

Il minimo valore per cui r risulti intero è p – z = 2, cioè r = 16 monete; la ricerca della minima soluzione conduce ad avere: p = 3 monete e z = 1 moneta.

E in effetti

$$5 \times 16 + 8 \times 1 + 7 \times 3 + 92 = 201$$
$$\text{e } 7 \times 16 + 9 \times 1 + 6 \times 3 + 62 = 201.$$

Abbiamo ovviamente infinite soluzioni, per esempio sempre con $r = 16$ monete, possiamo avere $p = 4$ monete e $z = 2$ monete e così via. O anche per $r = 17$ monete con tutti i valori per cui $p - z = 4$ monete. E via di questo passo.

15. Il problema è simile a quello svolto. In questo caso il sistema risolvente è:

$$\begin{cases} u + d + b = 41 \\ 4u + 3d + 0,5b = 40 \end{cases}$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} b = 41 - u - d \\ b = 80 - 8u - 6d \end{cases} \Rightarrow 41 - u - d = 80 - 8u - 6d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7u = 39 - 5d \Rightarrow u = \frac{39 - 5d}{7}$$

deve perciò aversi: $39 - 5d > 0$, cioè $d < 8$. Controlliamo quindi tutti i valori interi di d compresi tra 1 e 8, che rendono intera la frazione, ottenendo $d = 5$, $u = 2$ e $b = 34$. Non ci sono altre soluzioni.

16. Indichiamo con xy l'età attuale di Alex, il che significa che essa è, scrivendo in notazione posizionale, $10x + y$, perciò quella attuale di suo padre è $10y + x$. L'anno scorso invece avevamo che l'età di Alex era $10x + y - 1$, mentre quella della madre era $10(y - 1) + x$. Perciò quest'anno la madre ha $10(y - 1) + x + 1$ anni. E l'equazione risolvente è

$$10(y - 1) + x + 1 + 10y + x = 93$$

ossia semplificando:

$20y + 2x - 9 = 93$, o meglio, $20y + 2x - 102 = 0$, o ancora $10y + x - 51 = 0$.

Perciò $y = \dfrac{51 - x}{10}$. Proviamo a sostituire a x dei valori interi minori di 10, ma risulta ovvio che l'unico valore accettabile è 1, poiché ha la cifra delle unità uguale a quella di 51. Pertanto $x = 1$ e $y = 5$. Alex oggi ha perciò 15 anni.

17. Indicando con p il numero degli adulti, con m i militari e con r i ragazzi, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 5p+2m+\dfrac{1}{10}r=100 \\ p+m+r=100 \end{cases}$$

procediamo come al solito ottenendo:

$$\begin{cases} r=1000-50p-20m \\ r=100-p-m \end{cases} \Rightarrow 1000-50p-20m=$$

$$=100-p-m \Rightarrow m=\frac{900-49p}{19} \Rightarrow 1 \le p \le 18$$

Verificando otteniamo p = 11, m = 19 e r = 70.

18. Dobbiamo scrivere 100 = 7n + 11m, cioè

$$n=\frac{100-11m}{7} \vee m=\frac{100-7n}{11} \Rightarrow 1 \le m \le 9 \wedge 1 \le n \le 14.$$

Troviamo così n = 8e m = 4, da cui

100 = 7 × 8 + 11 × 4 = 56 + 44.

19. Dette m le mele possiamo dire che m = 79h + 17. Inoltre m=37k, con 100 < k < 200. Pertanto abbiamo

79h + 17 = 37k, cioè $k=\dfrac{79h+17}{37}$

deve perciò aversi

$$100<\frac{79h+17}{37}<200 \Rightarrow 3700<79h+17<7400 \Rightarrow .$$

$$\Rightarrow 3683<79h<7383 \Rightarrow 46 \le h \le 93$$

Fra le verifiche, l'unica che funziona è quando h = 78, nel qual caso si ha: k = 167. Anche se non richiesto, il numero delle mele è 6179.

20. Indichiamo il valore di ciascun animale con h, c, m e v. Otteniamo così:

$$\begin{cases} 5h+2c+8m+7v=3h+7c+2m+v \\ 6h+4c+m+2v=8h+c+3m+v \\ 5h+2c+8m+7v=8h+c+3m+v \end{cases}$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} 2h-5c+6m+6v=0 \\ 2h-3c+2m-v=0 \\ 3h-c-5m-6v=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{2h}-5c+6m+6v=\cancel{2h}-3c+2m-v \\ 2h-3c+2m-v=0 \\ 9h-3c-15m-18v=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c-4m-7v=0 \\ 2h-3c+2m-v=0 \\ 9h-\cancel{3c}-15m-18v=2h-\cancel{3c}+2m-v \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{4m+7v}{2} \\ 2h-3c+2m-v=0 \\ 7h-17m-17v=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{4m+7v}{2} \\ 2h-3c+2m-v=0 \\ h=\dfrac{17m+17v}{7} \end{cases}$$

da cui ricaviamo l'equazione:

$$2\times\frac{17m+17v}{7}-3\times\frac{4m+7v}{2}+2m-v=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{34m+34v}{7}-\frac{12m+21v}{2}+2m-v\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 68m+68v-84m-147v+28m-14v=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12m-93v=0\Rightarrow m=\frac{31}{4}v$$

Sostituendo avremo:

$$\begin{cases} c = \dfrac{\cancel{4} \times \dfrac{31}{\cancel{4}} v + 7v}{2} \\ m = \dfrac{31}{4} v \\ h = \dfrac{17 \times \dfrac{31}{4} v + 17v}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 19v \\ m = \dfrac{31}{4} v \\ h = \dfrac{85}{4} v \end{cases}$$

Pertanto il numero dei vitelli deve essere multiplo di 4. Consideriamo il minimo valore, appunto 4, ottenendo così 85 cavalli, 76 cammelli e 31 muli.

21. Sia n il numero dei gradini, esso verifica le seguenti proprietà:

$$n = 5m + 1 = 6k + 9 = 7p + 19.$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 5m + 1 = 6k + 9 \\ 6k + 9 = 7p + 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{6k + 8}{5} \\ p = \dfrac{6k - 10}{7} \end{cases}$$

che si può anche scrivere

$$\begin{cases} m = \dfrac{5k + k + 5 + 3}{5} \\ p = \dfrac{7k - k - 7 - 3}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = k + 1 + \dfrac{k + 3}{5} \\ p = k - 1 - \dfrac{k + 3}{7} \end{cases}$$

Pertanto $k + 3$ deve essere multiplo di 5 e anche di 7, cioè di 35.

Perciò $k + 3 = 35t$, quindi $k = 35t - 3$ e perciò

$$n = 6 \times (35t - 3) + 9 = 210t - 9$$

Perciò il primo valore accettabile si ha per $t = 1$, ed è $210 - 9 = 201$.

22. Diciamo n il numero da trovare. Si ha: $n - 3 = 8m$, $n - 1 = 5p$. quindi $n = 8m + 3 = 5p + 1$

D'altro canto deve essere $40<n<80$, quindi $40<8m + 3 < 80$ e $p = \dfrac{8m+2}{5}$, cioè $37 < 8m < 77 \Rightarrow 5 \le m \le 9$

Verifichiamo quali valori vanno bene:

m	n	$p = \dfrac{8m+2}{5}$
5	43	Non intero
6	51	82
7	59	Non intero
8	67	Non intero
9	75	Non intero

23. Il numero cercato, in quanto multiplo di 7, si può scrivere nella forma $7a$. La seconda informazione ce lo fa scrivere anche nella forma $2b + 1$, le altre nelle forme

$$3c + 2,\ 4d + 3,\ 5e + 4,\ 6f + 5$$

Per quanto suggerito possiamo anche scrivere

$$3c - 1,\ 4d - 1,\ 5e - 1 \text{ e } 6f - 1.$$

Se perciò consideriamo il mcm(3, 4, 5, 6) = 60, vuol dire che il numero si può scrivere nella forma $60t - 1$. Basta quindi considerare fra questi numeri qual è il primo divisibile per 7. 59 è un numero primo, quindi non va bene, ma $119 = 7 \times 17$, è perciò il numero cercato.

Numeri figurati

1. Facilmente troviamo che il numero cercato è 6, perché
   1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 × 6 : 2 = 15, così come 7 + 8 = 15.
2. Basta applicare la formula: $\frac{\cancel{20}^{10} \times 21}{\cancel{2}_1} = 10 \times 21 = 210$.
3. Se su una pallina è scritto 1, allora esattamente in 2 palline è scritto 1 e su tutte le altre è scritto 0. Se su una pallina è scritto 2, allora esattamente in 2 palline è scritto 2 e su tutte le altre è scritto 0. questo discorso si può ripetere per tutte le altre cifre. quindi al massimo in 2 palline vi è un numero diverso da zero, lo stesso numero, e sulle altre 18 vi è 0.
4. Basta osservare che
   $$2+4+6+\ldots+30=2\times(1+2+3+...+15) = \cancel{2}\times\frac{15\times16}{\cancel{2}} = 240$$
5. Come nell'esercizio precedente si ha:
   $$3+6+9+\ldots+30=3\times(1+2+3+\ldots+15) = 3\times\frac{15\times\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}} = 360.$$
6. Scriviamo
   $$13+14+15+...+28 = 1+2+3+\ldots+12+13+14+15+\ldots+28 - (1+2+3+\ldots+12)$$
   pertanto avremo:
   $$13+14+15+...+28 = \frac{28\times29}{2} - \frac{12\times13}{2} = 406 - 78 = 328$$
7. Tenuto conto degli altri calcoli dovrebbe essere
   $$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = T_4^2 = \left(\frac{4\times5}{2}\right)^2 = 15^2 = 225$$
8. Dato che $9 = 3^3$, $25 = 5^2$, $49 = 7^2$, dovrebbe essere
   $$8 \times T_4 + 1 = 9^2 = 81.$$
9. Dato che ogni cuscino riduce di 1 cm lo spessore dobbiamo sommare i numeri 30 + 29 + 28 + … + 11. si ha:
   30+29+28 + … + 11 = 1 + 2 + … + 30 – (1 + 2+… +10)=

$$= \frac{{}^{15}\cancel{30}\times 31}{\cancel{2}} - \frac{{}^{5}\cancel{10}\times 11}{\cancel{2}} = 465 - 55 = 410$$

10. Dato che la media aritmetica di n numeri è uguale alla loro somma divisa per n, essa è

$$\frac{\frac{n\times(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

quindi dobbiamo cercare per quali n, $n + 1$ è minore del doppio di 2003, cioè di 4006, cioè per n minore di 4005, quindi il più grande valore è 4004.

11. Deve essere $\frac{n\times(n+1)}{2} = 153 \Rightarrow n\times(n+1) = 306$, quindi dobbiamo scomporre 306 nel prodotto di due interi consecutivi. Si ha: 306 = 17 × 18, quindi i numeri sono 17.
12. Dato che 2 + 4 + … + $2n$ = 2 × (1 + 2 + … + n), la somma cercata è:

$$2\times\frac{n\times(n+1)}{2} = n\times(n+1)$$

13. Come nell'esercizio precedente avremo: $3\times\frac{n\times(n+1)}{2}$.
14. Sempre con riferimento agli esercizi precedenti avremo:

$$m\times\frac{n\times(n+1)}{2}.$$

15. Per stabilire quale numero abbiamo scritto per 1993°, osserviamo che il numero 1 occupa la posizione 1, il 2 occupa le posizioni 2 e 3, il 3 le posizioni 4, 5 e 6. Cioè l'ultima posizione che occupa il numero n è la somma dei primi n interi. Cioè $\frac{n\times(n+1)}{2}$. Non è difficile vedere che

$$\frac{62\times 63}{2} = 1953, \frac{63\times 64}{2} = 2016$$

Quindi il 1993° numero è 63, che diviso per 5 ha resto 3.

16. Facilmente si ha: $S_m = m \times S_1$, quindi avremo:

$$S_1 + S_2 + ... + S_{10} = S_1 + 2 \times S_1 + ... + 10 \times S_1 =$$

$$= S_1 \times (1 + 2 + ... + 10) = \frac{10 \times 11}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} = 55^2 = 3025$$

17. Conviene sommare 10 + 11 + … + 98 e poi togliere i numeri con due cifre uguali, cioè 11 + 22 + … + 88. Ora

$$10 + 11 + \ldots + 98 = 1 + 2 + \ldots + 98 - (1 + 2 + \ldots + 9) =$$

$$\frac{\overset{49}{\cancel{98}} \times 99}{\cancel{2}} - \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \times 9}{\cancel{2}} = 9 \times (49 \times 11 - 5) = 9 \times 534 = 4806$$

mentre

$$11 + 22 + \ldots + 88 = 11 \times (1 + 2 + \ldots + 8) =$$

$$= 11 \times \frac{8 \times 9}{2} = 11 \times 36 = 396$$

quindi la somma cercata è 4806 – 396 = 4410.

18. Per quanto già visto lo sono quelli il cui doppio si può scrivere come prodotto di due numeri interi consecutivi.
$2 \times 91 = 2 \times 7 \times 13 = 13 \times 14$. 91 è triangolare, precisamente è T_{13};
$2 \times 106 = 2^2 \times 53$. 106 non è un numero triangolare;
$2 \times 170 = 2^2 \times 5 \times 17$. 170 non è un numero triangolare;
$2 \times 190 = 2^2 \times 5 \times 19 = 19 \times 20$. 190 è T_{19};
$2 \times 231 = 2 \times 3 \times 7 \times 11 = 21 \times 22$. 231 è T_{21}.

19. Dato che $4=2^2$, $9=3^2$, $16=4^2$, avremo $T_{10} + T_{11} = 11^2 = 121$.

20. Considerando il primo numero pentagonale uguale a 1, osserviamo che il terzo numero pentagonale si ottiene dal secondo aggiungendo altri 7 punti, quindi $P_3=P_2+7=12$. Allo stesso modo, il quarto numero pentagonale si ottiene dal terzo aggiungendo altri 7+3=10 punti. Quindi $P_4 = P_3 + 10 = 22$. Non è difficile capire perciò che si avrà $P_5 = P_4 + 13=35$.

21. Tenuto conto dell'esercizio precedente avremo $P_6=P_5+16$.

22. Dato che $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, avremo $P_4 - T_3 = 4^2 =16$.

23. Dobbiamo cercare quindi un numero n per cui $\frac{n\times(n+1)}{2}$ è un quadrato perfetto. Il che significa che o n è un quadrato perfetto e l'altro è il doppio di un quadrato perfetto, o viceversa. Operando in questo modo troviamo

$$T_{288}=\frac{288\times 289}{2}=144\times 289=12^2\times 17^2=204^2$$

$$T_{1681}=\frac{1681\times 1682}{2}=41^2\times 29^2=1189^2$$

24. Abbiamo:

$$\frac{n\times(n+1)}{2}+\frac{(n+1)\times(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\times[n+n+2]}{2}=$$

$$=\frac{(n+1)\times 2\times(n+1)}{2}=(n+1)^2$$

25. Abbiamo:

$$8\times\frac{n\times(n+1)}{2}+1=4n\times(n+1)+1=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

26. Abbiamo: $P_n=\frac{n\times(3n-1)}{2}$.

27. Abbiamo

$$P_n-T_{n-1}=\frac{n\times(3n-1)}{2}-\frac{(n-1)\times n}{2}=$$

$$=\frac{n\times(3n-1-n+1)}{2}=\frac{n\times 2n}{2}=n^2$$

Bibliografia

Alcuino da York, *Giochi matematici alla corte di Carlomagno. Problemi per rendere acuta la mente dei giovani–Propositiones ad acuendos juvenes.* Testo latino a fronte, ETS, Pisa 2005

B. Auerbach, O. Chein *Problem solving through recreational mathematics*, Dover, New York, 2000

C. G. Bachet *Problèmes plaisants et délectables qui se font par le nombres*, V edizione, rivista da A. Labosne, Librairie scientifique et technique Alber Blanchard, Paris, 1959

A. H. Beiler *Recreations in the theory of numbers*, Dover, New York, 1964

Cajori F., *A History of Mathematical Notations*, Dover, New York, 1993

I. Ghersi *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano 1978

E. Lucas *Récréations mathématiques*, in 4 volumi, Gauthier–Villars. et fils, imprimeurs–libraires, Paris, 1882.

K. Menninger *Number word and number symbols*, Dover, New York, 1992

O. Ore, *Number theory and its history*, Dover, New York, 1988

W.W. Rouse Ball, H.S.M. Coxeter, *Mathematical recreations and essays*, Dover, New York 1987