Carmelo Di Stefano

QUADERNI DI MATEMATICA RICREATIVA

Vol. 3 Combinatorica

Simbologia

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ è l'insieme dei numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ è l'insieme dei numeri interi relativi

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ è l'insieme dei numeri razionali relativi

$n!$ indica il fattoriale di un numero, cioè il prodotto dei primi n numeri interi positivi

$\binom{n}{k}$ indica il coefficiente binomiale o il numero di combinazioni di n oggetti a gruppi di k

INDICE

Introduzione

La matematica ricreativa, cioè il giocare con la matematica, forse è più vecchia della stessa matematica, poiché l'essere umano ha probabilmente pensato a giocare ancora prima di dedicarsi alle cose più serie, quale la sopravvivenza. Come acutamente osserva Roger Caillois nel suo fondamentale testo *I giochi e gli uomini*: «*Il gioco riposa e diverte. Evoca un'attività non soggetta a costrizioni, ma anche priva di conseguenze per la vita reale*.»
Gli storici hanno trovato manufatti di dadi o di scacchiere per giochi di vario tipo, nelle civiltà più antiche. Pare che il dado stesso sia stato inventato da un certo Palamede, addirittura già nel 2700 a.C. Ovviamente non tutti i giochi hanno una base matematica, ma molti sì, o comunque molti si giocano meglio conoscendo la matematica. E non vogliamo riferirci alla matematica per calcolare, quanto piuttosto a quella per ragionare.
Sempre con Caillois: «*Il gioco non prepara a un mestiere preciso, esso allena in generale alla vita aumentando ogni capacità di superare gli ostacoli o di far fronte alle difficoltà. È assurdo e non serve a niente nella vita reale, lanciare il più lontano possibile un martello o un disco di metallo, o riprendere e rilanciare continuamente una palla con una racchetta. Ma è utilissimo avere dei muscoli possenti e dei riflessi pronti.*»
Pertanto sarà inutile sapere svolgere un certo quesito, che in alcuni casi potrebbe anche farci vincere una gara e quindi darci almeno un premio di autostima, ma certamente è fondamentale il fatto che per risolvere il quesito dobbiamo abituarci a ragionare.
Lo scopo è quello di fornire al lettore notizie di tipo storico, ma nello stesso tempo di mostrare problemi standard unitamente con delle tecniche risolutive. Quindi saranno affrontati alcuni quesiti, spesso tratti da gare matematiche nazionali ed internazionali, e infine saranno proposti quesiti analoghi da risolvere. I problemi sono di diversi livelli opportunamente se-

gnalati, rivolti perciò a risolutori con diverse conoscenze culturali.
La speranza è che questi volumetti possano stimolare ciascuno dei suoi lettori a giocare con la matematica, cercando in tal modo di allontanare quella troppo diffusa *antipatia*, che molti hanno verso questa disciplina. Anche perché noi crediamo che le motivazioni di questo atteggiamento ostile siano legati proprio al fatto che spesso, nelle scuole, la matematica viene proposta solo come procedura di calcolo, priva di applicazioni di qualsiasi natura e soprattutto rivolta solo a quelli che hanno il bernoccolo della matematica.
Alla fine del volume si trova una piccola bibliografia di testi di matematica ricreativa fra i più importanti e fra i quali parecchi di essi sono stati consultati per la stesura dello stesso.

Come usare il volume

Per quello che riguarda l'uso del libro, dato che esso è destinato a lettori con diverse capacità risolutive, indicheremo con opportuni simboli i problemi svolti e proposti, per facilitare la lettura, e anche per evitare facili scoraggiamenti da parte di chi non ha le conoscenze adatte per risolvere un dato quesito.
In particolare indicheremo con opportuni simboli i quesiti e la teoria a seconda delle conoscenze di ciascun lettore. In particolare useremo

⓪ per chi ha conoscenze a livello di scuola elementare,
① per chi ha conoscenze a livello di scuola media inferiore,
② per chi ha conoscenze a livello di primo biennio di scuola media superiore,
③ per chi ha conoscenze a livello di triennio finale di scuola media superiore.

Ovviamente la scelta che un certo argomento sia di un livello piuttosto che di un altro è del tutto personale, pertanto alcuni quesiti possono risultare più semplici o più difficili per il risolutore di quanto egli si aspetti dato il simbolo associato.
Le risposte alle attività proposte alla fine di ciascun capitolo, si trovano alla fine del volume.
Poiché proponiamo diversi quesiti assegnati in gare nazionali ed internazionali, li indicheremo con delle sigle, seguite da un anno, che è quello in cui sono stati assegnati. In particolare:

A indica Abacus, che è una sfida internazionale, tenuta on line da diversi anni dalla Grace Church School, ma che si basa su una centenaria rivista ungherese, chiamata proprio Abacus;
AHSME indica i quesiti assegnati alla Annual High School Mathematical Examination, che è una gara di matematica che si svolge annualmente negli Stati Uniti fra studenti di High

School, che in qualche modo è simile alla nostra scuola superiore;
B indica i quesiti assegnati ai giochi della Bocconi, nelle varie categorie e varie selezioni, semifinali o finali;
C indica i quesiti assegnati alla Canadian Mathematics Competition, gara per diversi livelli scolari, dalle elementari all'Università;
OMI indicano le varie categorie delle Olimpiadi della Matematica italiane;
K indica Kangourou, che è una gara internazionale con fasi nazionali, che coinvolge studenti dalla IV elementare alla V superiore, ovviamente con diversi livelli.

Un po' di storia

Problemi che riguardano il conteggio di elementi che verificano certe proprietà si trovano in molte antiche civiltà, anche solo per semplice gioco. Ricordiamo a tal proposito il problema esposto già nel papiro di Rhind, circa 1650 a.C., ritenuto uno dei documenti matematici più antichi a noi pervenuti.

«*In una proprietà ci sono 7 case. In ogni casa ci sono 7 gatti. Ogni gatto acchiappa 7 topi. Ogni topo mangia 7 spighe. Ogni spiga dà 7 heqat di grano. Quante cose ci sono in tutto in questa storia?*»

Passano parecchi secoli prima che la combinatoria divenga un ramo a sé stante della matematica. Nel frattempo vengono trovati interessanti risultati che avranno innumerevoli applicazioni in diverse branche della matematica. Per esempio i numeri di Fibonacci, illustrati nel 1202, che vengono fuori dal cosiddetto problema dei conigli.

Un certo uomo ha una coppia di conigli in un posto protetto da mura. Quante coppie di conigli saranno generate da quella coppia al termine di un anno se si suppone che ogni mese ogni coppia genera una nuova coppia che dal secondo mese diventa fertile?

La soluzione del problema porta alla famosissima successione di Fibonacci, i cui primi elementi sono: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,… in cui, fissati uguali a 1 i primi due termini, ogni altro termine è somma dei precedenti due.

In diverse civiltà si erano sviluppati calcoli riguardanti il cosiddetto triangolo aritmetico, da noi noto sotto il nome di Tartaglia, e fuori dall'Italia con quello di Pascal. Questo triangolo, che ha anch'esso diverse applicazioni, si costruisce con una regola simile a quella vista per i numeri di Fibonacci. Vediamo alcuni suoi elementi.

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

In questa costruzione, la prima riga contiene un solo 1, la seconda ne contiene 2, quindi ogni riga ha gli elementi estremi uguali a 1 e gli altri si ottengono sommando i due numeri della riga precedente che occupano la stessa posizione del numero da trovare e la posizione precedente. Per esempio il quarto numero della sesta riga, cioè il 10 è la somma del terzo e del quarto numero della quinta riga, cioè di 4 e 6.

Abbiamo detto che la combinatoria è una scienza difficile, vogliamo però enunciare un suo importante principio, che appare invece particolarmente semplice ed intuitivo.

Principio del nido del piccione (Pigeonhole principle)
Se ci sono alcuni piccioni ed un numero di nidi inferiori al numero di piccioni, allora in almeno un nido c'è più di un piccione.

Come si vede il principio è veramente banale e qualcuno potrebbe perciò obiettare che è inutile. In realtà in matematica nulla è così banale da potersi ritenere inutile.
Cominciamo a vedere qualche problema con una semplice applicazione del principio del nido del piccione, che è noto anche come principio dei cassetti.

⓪ In un cassetto sono messi a caso 10 calzini neri e 8 calzini bianchi identici. Giorgio si sveglia una mattina e senza accendere la luce per non svegliare sua moglie prende dei calzini.

Quanti ne deve prendere come minimo per essere sicuro che ce ne sono due dello stesso colore?
La risposta è semplice e non dipende da quanti calzini ci sono nel cassetto, ma solo da quanti colori ci sono. Basta che ne prenda 3, infatti se è sfortunato prendendone due ne prenderà uno bianco e l'altro nero, ma a questo punto il terzo è bianco o nero e perciò ne ha sicuramente due dello stesso colore.

Vediamo un'altra applicazione del principio dei piccioni, usando un quesito assegnato all'Abacus International del Marzo 2005.

◎ Su una spiaggia possono affittarsi: 8 pedalò, 10 canoe e 6 tavole da surf. Un giorno 6 di questi oggetti sono stati affittati. Stabilire, per ognuna delle seguenti affermazioni relativa agli oggetti non affittati, quali sono vere, quali false e per quali non si può decidere se sono vere o false.
a) Non ci sono più tavole da surf.
Può essere vera perché potrebbero essere state affittate tutte e sei, ma potrebbe anche non esserlo, se uno dei 6 oggetti affittati non è una tavola da surf.
b) E' possibile affittare ciascuno dei 3 oggetti.
Ancora una volta può essere vero o falso, perché abbiamo visto in a) che potrebbero essere state affittate solo le 6 tavole da surf che perciò non sarebbero più disponibili.
c) C'è almeno una tavola da surf disponibile.
Come in precedenza e per gli stessi motivi, l'affermazione può essere vera o falsa.
d) C'è almeno un pedalò disponibile.
Stavolta l'affermazione è vera perché i pedalò sono più dei 6 oggetti affittati.
e) Non ci sono più pedalò.
Per la stessa motivazione del punto precedente l'affermazione è sicuramente falsa, ce ne sono almeno 2.
f) Ci sono al massimo due canoe disponibili.

Questa è falsa, perché anche se sono state affittate solo canoe ne rimangono almeno 4.

Adesso proponiamo un quesito tratto dai Kangourou del 2001 per la categoria riservata alle quarte e quinte elementari.

① Venti caramelle sono distribuite tra alcuni kangourou in modo che ogni kangourou riceva almeno una caramella e che mai due kangourou abbiano un numero uguale di caramelle. Quanti kangourou al massimo sono presenti alla distribuzione delle caramelle?
Osserviamo che $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$, quindi i bambini sono meno di 6. Mostriamo che sono 5 perché per esempio
$1 + 2 + 3 + 4 + 10 = 20$, ma anche $1 + 2 + 3 + 5 + 9 = 20$ e diversi altri modi.

In seguito le tecniche combinatoriche cominciano ad applicarsi alla risoluzioni di problemi probabilistici. Ricordiamo per esempio le interessanti questioni poste e in parte risolte da Galileo Galilei (sul perché lanciando tre dadi fosse più probabile ottenere 10 piuttosto che 9), o da Gerolamo Cardano nel suo *Liber de ludo aleae*, scritto intorno al 1560. La data per così dire ufficiale della nascita del calcolo delle probabilità è però il 1654, anno in cui il cavaliere di Méré, Antoine Gombaud (1610 – 1685), noto giocatore, pensò di porre a un suo amico, il grande matematico Blaise Pascal, alcuni quesiti riguardanti il gioco dei dadi. In particolare poneva un problema simile al seguente.
«*Due giocatori, che indichiamo con A e B, puntano un'uguale somma e giocano a dadi in modo che chi vince* 5 *partite su* 9 *vince tutta la posta. A un certo momento il giocatore A ha vinto* 4 *partite, mentre il giocatore B ne ha vinte* 3. *A causa dell'irruzione improvvisa dei gendarmi il gioco viene interrotto, come deve essere divisa la posta? Il cavaliere pensa che*

non sia giusto dividerla in parti uguali poiché A ha più "probabilità" di B di vincere la partita.»
Pascal scrisse a un altro grande matematico dell'epoca: Pierre de Fermat esponendo la questione e ai loro scambi epistolari si può associare il germe della teoria della probabilità.
In seguito, l'olandese Christian Huygens, proprio traendo spunto dalla lettura della corrispondenza fra Fermat e Pascal, nel 1657 scrisse un articolo riguardante il gioco dei dadi. Nel 1713 fu pubblicato anche dallo svizzero Jacques Bernoulli l'*Ars conjectandi* (Arte di congetturare), in cui venivano riportate alcune formule utilizzate ancora oggi. Da allora molti altri eminenti matematici si sono occupati del calcolo delle probabilità che oggi viene considerata una delle più importanti discipline matematiche .
Un'altra importante disciplina in cui è importante sapere contare in modo opportuno è la statistica.
La statistica intesa come disciplina che raccoglie dati e informazioni a fini politici, economici, fiscali, … è antichissima. Sono state ritrovate tavolette in caratteri cuneiformi presso i Sumeri (da 4000 a 2000 anni prima di Cristo), in cui erano elencati uomini e beni materiali. Addirittura uno dei libri che formano la Bibbia, i *Numeri*, dedica tutta la sua prima parte al censimento effettuato da Mosé subito dopo la fuga dall'Egitto. Ricordiamo che anche il censimento della popolazione narrato nei Vangeli, che portò Giuseppe e Maria a recarsi a Betlemme, è stato storicamente accertato. Questi rilevamenti avevano carattere totale e non campionario.
Si deve arrivare però alla metà del XVII secolo perché si pongano i fondamenti della statistica descrittiva. È Hermann Conring (1606 – 1681) a essere considerato il fondatore della statistica su basi scientifiche. Un suo allievo, l'ungherese Martin Schmeitzel usò per la prima volta in un testo il vocabolo "statistica", intitolando la raccolta delle sue lezioni all'Università di Jena "Collegium politico-statisticum".

La prima applicazione "seria" della statistica, come l'elaborazione di tavole di mortalità per prevedere l'insorgere di epidemie, si effettuò in Inghilterra verso la metà del 1600. Ciò diede inizio alla cosiddetta statistica investigativa. Ai giorni nostri la statistica fa parte della vita di ogni uomo, direttamente o indirettamente, per esempio con gli innumerevoli sondaggi a cui siamo sottoposti o su cui veniamo informati.

Sia per le probabilità che per la statistica risulta importante considerare le percentuali. Consideriamo un semplice problema tratto dalla Canadian Mathematics competition del 2003.

⓪ Il compito di matematica di Abraham era formato da 30 quesiti di algebra e 50 di geometria, e ognuna delle risposte esatte valeva 1 punto. Sappiamo che ha risposto correttamente al 70% delle domande di algebra e la percentuale di risposte corrette totali è stata 80%. A quante domande di geometria ha risposto correttamente?

Abraham ha risposto correttamente al 70% di 30 domande, cioè a 21 domande. In totale ha risposto all'80% di 80 domande, cioè a 64 domande. Quindi ha risposto correttamente a 64 – 21 = 43 domande di geometria.

Concludiamo considerando un quesito di probabilità "storico", tratto da *Sopra le scoperte dei dadi* scritto da Galileo Galilei, nel 1612.

② *Che nel gioco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi, che questi, il che dipende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il* 3. *e il* 18. *come punti, con tre numeri comporre, cioè questi con* 6.6.6. *e quelli con* 1.1.1. *e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v.g. il* 6. *o il* 7., *li quali in più maniere si compongono, cioè il* 6. *con* 1.2.3.*e con* 2.2.2. *e con* 1.1.4. *ed il* 7. *con* 1.1.5., 1.2.4, 1.3.3., 2.2.3. *Tuttavia ancorché il* 9. *e* *il* 12. *in altrettante maniere si compongano in quante il* 10. *e* l'11. *perlochè d'equal uso devriano esser reputati; si vede non di meno, che la lunga osservazione ha fatto dai giocatori stimarsi più vantaggioso il* 10. *e* l'11. *che il* 9. *e il* 12.

Galileo, nel suo italiano seicentesco, abbastanza comprensibile fa osservare che per ottenere 9 i dadi possono avere avuto i seguenti punteggi:

(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)

mentre si può ottenere 10 nei seguenti modi:

(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4).

Quindi apparentemente sono lo stesso numero di uscite. Ciò non è vero perché i casi (1, 2, 6) e (1, 6, 2) sono diversi fra loro, quindi in effetti equivalgono a 6 casi:

(1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2) e (6, 2, 1).

Invece il caso (1, 4, 4) equivale solo a 3 diversi casi: (1, 4, 4), (4, 1, 4), (4, 4, 1) e il caso (3, 3, 3) un solo caso. Quindi per ottenere 9 vi sono 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25 casi favorevoli, mentre per ottenere 10 vi sono 6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27 casi favorevoli.

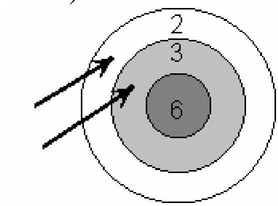
Ecco perché è più probabile ottenere 10 piuttosto che 9.

Attività

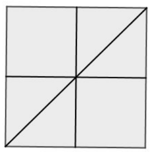
1. ◎ In un cassetto ci sono 4 calzini rossi, 5 verdi e 6 blu. Quanti calzini si devono prendere, come minimo, per essere sicuri che almeno due di essi siano dello stesso colore?
2. ◎ **(B2003)** Nel frigorifero dei gelati ci sono 60 ghiaccioli di 5 gusti diversi, una dozzina per ogni gusto. Qual è il numero minimo di ghiaccioli che si devono prendere (senza guardare …) per essere sicuri di averne presi due dello stesso gusto?
3. ◎ Con riferimento all'esercizio n 1, quanti calzini dobbiamo prendere, come minimo, per essere sicuri di prendere almeno due calzini rossi?
4. ◎ **(A1998)** In una scatola ci sono alcune palle rosse ed alcune verdi. Sappiamo che dobbiamo estrarre almeno 7 palle per avere la sicurezza di estrarre, senza guardare, una palla rossa, mentre ne dobbiamo estrarre almeno 13 per avere la sicurezza di estrarre due palle di colori diversi. Quante palle rosse e quante verdi ci sono nella scatola?
5. ◎ **(A2000)** In una busta vi è lo stesso numero di calzini bianchi e di calzini neri, indistinguibili al tatto. Sappiamo che il minimo numero di calzini da prendere, a caso, per averne un paio dello stesso colore è lo stesso del minimo numero da prendere per averne due di colore differente. Quanti calzini ci sono nella busta?
6. ◎ **(A2001)** Tre anatroccoli Nicky, Ticky e Vicky, giocano con i dadi, lanciandone 3 per volta. Ciascuno fa una delle seguenti affermazioni sulla somma ottenuta. Stabilisci quali di esse sono vere, quali false e quali invece possono essere vere o false, ma non è sicuro che lo siano.
   a) è più di 18.
   b) è più di 3.
   c) è meno di 18.
   d) è pari.
   e) è 3.

f) è almeno 3.

7. ◎ **(K2008)** L'orologio digitale di Lucia è difettoso: qualche volta fa apparire la cifra 8 al posto della cifra 0 e qualche volta fa apparire la cifra 0 al posto della cifra 8. All'inizio di una telefonata, Lucia ha guardato il suo orologio e ha letto 20:08. In quanti diversi orari potrebbe essere iniziata quella telefonata?
8. ◎ **(K2008)** Giovanna tira due frecce verso il bersaglio, ed è sicura di colpirlo. Il punteggio ottenuto è la somma dei punteggi realizzati con le singole frecce: per esempio nella figura vediamo una situazione nella quale il punteggio ottenuto è 5. Quanti punteggi diversi fra loro può ottenere Giovanna (5 incluso)?



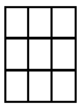
9. ◎ Prendi tutti i numeri di 4 cifre formati solo da cifre 4 o 5. Se sommi le cifre di ciascuno di questi numeri, quanti diversi totali puoi ottenere?
10. ◎ **(C1997)** Nel gioco "TRIQUADRATO", si ottengono 3 punti per ogni triangolo che si riesce a individuare e 4 punti per ogni quadrato. Qual è il massimo punteggio che si riesce a ottenere con la seguente figura?



11. ◎ **(C1999)** In una elezione Harold ha ricevuto il 60% dei voti e Jacquie ha ricevuto il resto. Se Harold ha vinto per 24 voti di differenza, quanta gente ha votato?
12. ① **(C1997)** Con le cifre 1, 2, 3, 4, usandole tutte, ciascuna una volta, si possono formare 24 differenti numeri di 4 ci-

fre. Se ordiniamo questi 24 numeri dal più piccolo al più grande, che posizione occupa il 3142?

13. ① **(A1997)** Ci sono 80 palle in un cestino. 35 sono rosse, 25 verdi, 15 gialle e 5 nere. Prendendo le palle senza guardare, quante se ne devono prendere, come minimo, per essere sicuri che ve ne sia almeno
    a) una rossa;
    b) una rossa o una nera;
    c) una rossa e una nera;
    d) due di diverso colore;
    e) tre dello stesso colore.
14. ① **(A2004)** Trovare tutti i numeri di 5 cifre in cui ogni cifra è maggiore della somma delle cifre che stanno alla sua destra.
15. ① **(A2004)** Lancio un dado regolare (6 facce con i punteggi da 1 a 6) 10 volte. Il prodotto dei 10 numeri ottenuti è 7776; qual è la massima somma possibile dei 10 punteggi?
16. ① **(A2004)** Su un orologio digitale si vedono gli orari da 00:00 a 23:59. Per quanto tempo, in un giorno, si vedranno 3 cifre uguali e una diversa sull'orologio?
17. ① **(A2005)** La finestra della stanza di Steve è un rettangolo diviso in 3 × 3 rettangoli più piccoli, come mostrato in figura.

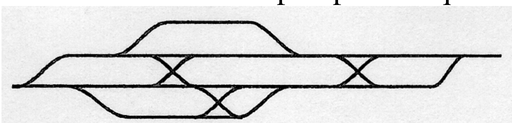


Steve dipinge una cifra nel mezzo di due soli di questi 9 rettangoli, in modo che ciò che si vede dall'interno è lo stesso di ciò che si vede dall'esterno. Se le cifre che dipinge le sceglie fra le seguenti, in quanti diversi modi può fare questo lavoro?

18. ① **(A2006)** Quanti numeri interi di 3 cifre hanno la somma

delle cifre che è un numero dispari?

19. ① **(A2007)** Heidi lancia tre dadi (dello stesso colore, indistinguibili) e ne somma i punteggi. Se registra solo i punteggi pari e maggiori di 8, quanti diversi casi può registrare?
20. ① **(C1999)** In un campionato di softball, dopo che ogni squadra ha giocato contro ciascuna delle rimanenti per 4 volte, la classifica è Lions 22, Tigers 19, Mounties 14 e Royals 12. Se per ogni vittoria si ottengono 3 punti e 1 punto per ogni pareggio, quante partite sono finite in pareggio?
21. ① **(C2009)** I cinque numeri 3, 4, 5, 8, 9, hanno una somma di 29. Quante cinquine di numeri di una cifra, ordinati dal più piccolo al più grande, hanno somma di 33?
22. ① **(A2008)** Il diagramma sottostante mostra uno schema di uno smistamento di binari. In quanti diversi modi un treno proveniente da sinistra può passare questo snodo?



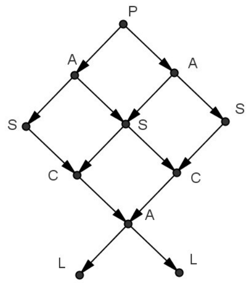
23. ① **(C2003)** Nel diagramma seguente i numeri 1, 2, 4, 5, 6, e 8 sono sostituiti dalle lettere, non nell'ordine, A, B, C, D, E ed F, in modo che ogni numero si ottenga come differenza positiva fra i due numeri che, nella riga precedente, occupano la stessa posizione e la posizione precedente. Per esempio il 7 della terza riga è la differenza positiva fra D e 9, perciò D = 2. Quanto vale A + C?

A 10 B C
D 9 E
7 F
3

24. ① **(C2005)** Chiamiamo decrescente un numero intero le cui cifre sono tali che ognuna è minore di quelle alla sua sinistra. Per esempio 8540 è un numero decrescente di 4

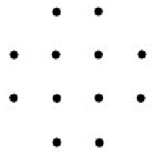
cifre. Quanti numeri decrescenti ci sono fra 100 e 500?

25. ① **(C2005)** Uno strano dado sulle facce ha punti che valgono 2, 2, 3, 3, 5 e 8. Se lanciamo due dadi come questo, quanti diversi punteggi possiamo ottenere?
26. ② **(C2004)** Luke ha giocato 20 partite, vincendone il 95%. Quante altre partite dovrebbe come minimo giocare e vincere perché la sua percentuale di vittorie salga al 96%?
27. ② **(C2004)** Quanti diversi percorsi, nel diagramma seguente, formano la parola PASCAL?

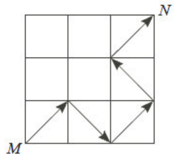


28. ② **(B2008)** Il "par" di una buca del minigolf è il numero medio di tiri necessari ad un buon giocatore per far entrare la pallina in quella buca. Il minigolf di Math City ha diciotto buche: nove hanno un "par" di 2 e nove un "par" di 3. Desiderio ha appena terminato il percorso delle 18 buche. Per nessuna, il numero dei suoi tiri è stato uguale al "par" della buca. Ha comunque fatto, in totale, tanti tiri quanti ne avrebbe fatti un buon giocatore: 45. Soltanto per una buca Desiderio è riuscito a fare un solo tiro. Per quante buche Desiderio ha dovuto fare 3 tiri ?
29. ② **(A2006)** Misuriamo il peso di 5 diverse persone, una dopo l'altra, e dopo ogni misurazione calcoliamo la media di quelli che si sono già pesati. In questo modo ogni media aumenta di 2 Kg la precedente. Quanti Kg l'ultimo è più pesante del primo?
30. ② **(A2005)** Usando 3 cifre distinte formiamo tutti i possibili numeri di 1, 2 e 3 cifre. La somma di tutti questi numeri è 5635. quali sono queste cifre?

31. ② **(C2000)** Dodici punti sono segnati su una griglia rettangolare, come mostrato in figura. Quanti quadrati possiamo tracciare congiungendo 4 di questi punti?



32. ② **(C2009)** Kira può tracciare un cammino da M a N mediante frecce che sono diagonali di uno dei nove quadrati in figura. Mostriamo un esempio. Un cammino non può passare due volte per lo stesso quadrato. Quanti sono tutti i cammini che vanno da M a N?



33. ③ **(C2005)** In un sacchetto ci sono 8 palline gialle, 7 rosse e 5 nere. Senza guardare, Igor toglie N palline dal sacchetto ed è sicuro che comunque ha preso le palline nel sacchetto, sono rimaste almeno 4 palline di un colore e 3 palline di un altro colore. Qual è il massimo valore che può avere N?

34. ③ **(C2005)** Nella seguente tabella, possiamo formare il numero 2005, iniziando da 2 e poi muovendoci orizzontalmente, verticalmente o diagonalmente, da cella a cella. In quanti diversi modi possiamo formare 2005?

5	5	5	5	5
5	0	0	0	5
5	0	2	0	5
5	0	0	0	5
5	5	5	5	5

Raggruppamenti semplici e ripetuti

Il problema di contare in modo opportuno insiemi particolarmente numerosi, o comunque di difficile determinazione, è uno dei più importanti della matematica. Cominciamo a studiare i diversi raggruppamenti che possono farsi scegliendo alcuni elementi da un insieme.

Dato un insieme A di n elementi diversi e un numero naturale k, chiamiamo

raggruppamenti semplici di A, il numero di gruppi che possono formarsi con elementi di A tutti distinti tra loro;

raggruppamenti ripetuti di A, il numero di gruppi che possono formarsi con elementi di A non tutti distinti tra loro.

Per esempio stabilire tutti i modi in cui possono uscire i numeri 12, 34, 56, 77 e 81 sulla ruota del lotto di Napoli, è un problema di raggruppamenti semplici. Invece stabilire quanti numeri di 3 cifre si possono formare con cifre dispari è un problema di raggruppamenti ripetuti (135 e 351 sono numeri diversi costruiti con le stesse cifre).

Vediamo di distinguere i raggruppamenti anche con altre modalità.

Dato un insieme A di n elementi e un numero naturale k, chiamiamo **disposizioni** di n oggetti di classe k, il numero di gruppi di k elementi che possono formarsi con gli elementi di A, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri o per un elemento o per l'ordine in cui si presentano gli elementi, o, se ripetuti, per il numero di volte che si ripetono.

Per esempio trovare quanti numeri di 3 cifre si possono formare con cifre dispari è un problema di disposizioni semplici se le cifre sono tutte diverse, di disposizioni ripetute se le cifre si possono ripetere.

Il numero di disposizioni semplici si indicano con $D_{n,k}$.

Come possiamo calcolare il numero delle disposizioni? Per esempio se volessimo calcolare quanti numeri di 3 cifre dispari e diverse si possono formare, come possiamo fare?

I numeri che cerchiamo sono di tipo xyz. X lo possiamo scegliere nell'insieme {1, 3, 5, 7, 9}, quindi ha 5 possibilità di scelta. Y lo scegliamo sempre nell'insieme {1, 3, 5, 7, 9}, ma le scelte stavolta sono 4 perché la scelta deve essere diversa dalla precedente, per esempio se abbiamo scelto $x = 1$, y lo sceglieremo nell'insieme {3, 5, 7, 9}. Ma allora per ognuna delle 5 scelte di x ci sono 4 scelte per y, cioè in totale $5 \times 4 = 20$ scelte per xy. Ma allora z lo scegliamo fra i 3 rimanenti numeri dispari. Pertanto alla fine avremo $5 \times 4 \times 3 = 60$ numeri del tipo cercato.

Ragionando come nell'esempio precedente, possiamo enunciare il seguente risultato.

TEOREMA

Il numero di disposizioni semplici di n oggetti presi a gruppi di k si ottiene moltiplicando k numeri interi consecutivi decrescenti a partire da n, in simboli:

$$D_{n,k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

Così per esempio

$$D_{7,5} = 7 \times (7-1) \times (7-2) \times (7-3) \times (7-4) = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

Se invece possiamo ripetere anche gli elementi, per esempio se volessimo calcolare quanti numeri di 3 cifre dispari anche uguali fra loro si possono formare, allora ogni volta abbiamo sempre 5 scelte, sia per *x*, che per *y* che per z. Cioè i numeri saranno $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$. Abbiamo perciò il seguente risultato:

TEOREMA

Il numero di disposizioni ripetute di n oggetti presi a gruppi di k si ottiene moltiplicando per k volte il numero n, in simboli:

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k$$

Ovviamente possiamo anche considerare disposizioni di n oggetti a gruppi di n, cioè possiamo prendere tutti gli elementi. In questo caso chiamiamo le disposizioni in modo diverso.

Le disposizioni di n oggetti a gruppi di n, si chiamano **permutazioni** degli n oggetti. In questo caso ogni gruppo differisce dagli altri solo per l'ordine in cui si presentano gli elementi.

Le permutazioni semplici si indicano con P_n, quelle ripetute con $P_n^{(r)}$. Tenuto conto dei precedente teoremi si ha ovviamente

TEOREMA

Il numero di permutazioni semplici di n oggetti si ottiene moltiplicando fra loro tutti i primi n numeri interi consecutivi, in simboli:

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$$

Il prodotto dei primi n numeri interi consecutivi si chiama fattoriale di n e si indica con n!.

Per esempio calcolare quanti anagrammi, anche privi di significato si possono fare usando le lettere A, B, C, D, la risposta è $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Se le permutazioni sono ripetute ovviamente i numeri si riducono. Per esempio gli anagrammi della parola AMORE sono 5! = 120, invece quelli della parola AMARE sono di meno, perché nel primo caso scambiando la prima con la terza lettera si ottiene la parola diversa OMARE, mentre se facciamo lo stesso con AMARE otteniamo ancora AMARE. Questo succede tutte le volte in cui scambiamo le lettere uguali fra loro. Quindi vuol dire che le 120 parole che si formano con AMARE, sono formate da due gruppi di 60 parole a due a due uguali, quindi in totale le permutazioni di AMARE sono 60, o meglio $\frac{120}{2}=\frac{5!}{2!}$. Ragionando allo stesso modo, le permutazioni della parola MAMMA si ottengono separando i 5! = 120 anagrammi in gruppi in cui scambio le M fra di loro, che sono 3! = 6 e in gruppi in cui scambio le A fra di loro, che sono 2! = 2. Perciò gli anagrammi cercati sono $\frac{120}{6\times 2}=\frac{5!}{3!\times 2!}=10$. Più in generale si ha:

Teorema

Il numero di permutazioni ripetute di n oggetti, in cui alcuni si ripetono a_1 volte, altri a_2 volte e così via fino ad a_k volte si ottengono dividendo le permutazioni semplici di n oggetti per le permutazioni semplici degli a_i. In simboli:

$$P^{(r)}_{n,a_1,a_2,\ldots,a_k}=\frac{n!}{a_1!\times a_2!\times\ldots\times a_k!}$$

Ci rimane da considerare il caso in cui i gruppi differiscono solo per la presenza di uno o più elementi, non per l'ordine.

Dato un insieme A di n elementi e un numero naturale k, chiamiamo **combinazioni** di n oggetti di classe k, il numero di gruppi di k elementi che possono formarsi con gli elementi di A, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri solo per uno o più elementi. Le combinazioni semplici si indicano con $C_{n,k}$,

o più comunemente con $\binom{n}{k}$.

Per esempio calcolare quanti diversi ambi possono uscire nel gioco del lotto è un problema di combinazioni semplici, perché l'ambo (13, 45), per esempio, è lo stesso dell'ambo (45, 13). Come possiamo calcolare le combinazioni? Consideriamo per esempio quanti sono i terni che possono uscire nel gioco del lotto. Partiamo dalle disposizioni di 90 numeri a gruppi di 3, che sappiamo essere in numero di 90 × 89 × 88. Quante di queste terne sono la stessa terna? Per esempio (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) e (3, 2, 1) rappresentano la stessa terna. Ma questo vale per ogni terna. Cioè ogni terna rappresenta 6 terne. Quindi vuol dire che per ottenere le combinazioni dobbiamo dividere le disposizione per 6, cioè le combinazioni cercate sono in numero di $\frac{90\times89\times88}{6}=117480$. Osserviamo che 6 = 3!, quindi possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema

Il numero di combinazioni semplici di n oggetti a gruppi di k è dato dal rapporto fra le disposizioni di n oggetti a gruppi di k e le permutazioni di k oggetti. In simboli:

$$C_{n,k}=\binom{n}{k}=\frac{D_{n,k}}{P_k}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\times k!}$$

Le combinazioni con ripetizione si indicano con il simbolo $C_{n,k}^{(r)}$

TEOREMA
Il numero di combinazioni di n oggetti, ognuno dei quali ripetuto fino a un massimo di k volte è $C_{n,k}^{(r)} = \binom{n+k-1}{k}$.

Vediamo adesso qualche quesito, cominciando con uno assegnato dalla rivista Abacus nel 2002.
⓪ Quanti numeri di 3 cifre hanno esattamente una cifra zero?
Sono i numeri del tipo X0Y o XY0, con X e Y diversi da zero e che possono perciò scegliersi fra le cifre da 1 a 9. Essi sono quindi 2 × 9 × 9 = 162.

Ancora un quesito tratto dalla rivista Abacus del 2002.

⓪ Quattro studenti consegnano il compito all'insegnante, ma dimenticano di scrivere il nome. L'insegnante li corregge e li consegna ai ragazzi a caso. In quanti diversi modi può accadere che nessuno dei 4 riceva il proprio compito?
Diciamo ABCD la sequenza corretta. Se il primo riceve B, il secondo può ricevere uno qualsiasi degli altri tre compiti. Abbiamo quindi le sequenze BA, BC, BD. Dalla sequenza BA si prosegue con BAD, e quindi BADC; dalla sequenza BC si prosegue BCA (da scartare, poiché non si può proseguire BCAD), e BCD e quindi BCDA; dalla sequenza BD si prosegue BDA, e quindi BDAC. Non è difficile capire che anche quando il primo riceve C o D vi sono sempre tre casi: CADB, CDAB, CDBA, DABC, DCAB, DCBA, per un totale di 9 casi.

Passiamo a un quesito un po' più difficile.

① Quanti numeri di 3 cifre hanno almeno una cifra uguale a 7?
Conviene calcolare quanti non hanno neanche una cifra uguale a 7. Un numero di 3 cifre senza una certa cifra, per esempio il 7, è un numero per il quale la prima cifra si può scegliere fra 8 numeri (escluso 0 e 7), la seconda e la terza fra 9 numeri,

quindi in totale vi sono 8 × 9 × 9 = 648 numeri che non hanno il 7 fra le loro cifre, su un totale di 900. Quindi quelle che hanno almeno un 7 sono 900 – 648 = 252.

Adesso consideriamo un quesito assegnato all'**AHSME** del 1985.

① Consideriamo la parola CONTEST; in quanti dei suoi anagrammi le prime due lettere sono vocali?

Gli anagrammi di CONTEST sono in numero di $\frac{7!}{2!}=2520$.

Noi però cerchiamo quelli per i quali le prime due lettere sono vocali, cioè che iniziano per OE oppure per EO, cioè due casi. Allora dobbiamo calcolare gli anagrammi della parola formata solo da consonanti: CNTST e moltiplicare per 2. Quindi gli anagrammi cercati sono $2\times\frac{5!}{2!}=5!=120$.

Vediamo adesso un quesito più impegnativo, tratto dalla finale Kangourou del 2007.

② Ho in tasca delle caramelle tutte diverse tra loro e il numero dei modi in cui posso sceglierne tre è il doppio del numero dei modi in cui posso sceglierne due. Quante caramelle ho in tasca?

Il numero di modi di scegliere 3 caramelle da n è ovviamente $\binom{n}{3}$, quello di sceglierne 2 è invece $\binom{n}{2}$. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione:

$$\binom{n}{3}=2\cdot\binom{n}{2}\Rightarrow\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3\cdot 2}=\cancel{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{\cancel{2}}$$

Ovviamente $n > 3$, e quindi possiamo eliminare i fattori comuni che sono diversi da 0. Otteniamo $n - 2 = 6$, cioè $n = 8$. Controlliamo:

$$\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}}{\cancel{6}}=56;2\cdot\binom{8}{2}=\cancel{2}\cdot\frac{8\cdot 7}{\cancel{2}}=56$$

Ancora un quesito tratto dai Kangarou ma del 2008.

② Il canguro Kang è capace di muoversi solo saltando e sa fare salti solo da un metro o da tre metri. Kang vuole spostarsi di dieci metri in linea retta. Quante sono le possibili sequenze di salti che glielo consentono? (Considera diverse due sequenze diversamente ordinate, come ad esempio {1,3,3,3} e {3,3,3,1}).

Possiamo avere o 10 salti da 1, ovviamente in un solo modo. Oppure 7 salti da 1 e 1 da 3, questo in $\frac{8!}{7!}=8$ modi diversi, dato che abbiamo a che fare con permutazioni con ripetizione della sequenza 11111113. Oppure 4 salti da 1 e 2 da 3, in $\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$ modi, poiché sono le permutazioni di 111133. Infine 1 salto da 1 e 3 da 3, in $\frac{4!}{3!}=4$ modi, poiché sono le permutazioni di 1333. In totale perciò sono 1 + 8 + 15 + 4 = 28 diversi modi.

Sempre dai Kangarou, ma del 2008, un quesito relativo ai fattoriali.

② Per ogni numero intero positivo n maggiore o uguale a 2 si pone n! = 1·2·3· ... ·(n – 1)· n. Si sa che per un intero k si ha k! = $2^{15} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$. Quanto vale k?

Certamente è k < 17, poiché questo fattore primo non compare fra quelli proposti. Per motivi opposti è anche k ≥ 13. Dato che vi sono 2 fattori 7, possiamo dire che è k ≥ 14 e poiché vi sono 3 fattori 5 è k ≥ 15. A questo punto concludiamo che è k = 16, infatti 16! contiene 8 numeri pari, quindi 2^8, ma fra questi pari ci sono anche 4, 8, 12, e 16, che contengono rispettivamente altre 1, 2, 1 e 3 potenze di 2, per un totale perciò di 8 + 1 + 2 + 1 + 3 = 15. Facilmente si vede che tutte le altre potenze corrispondono.

Chiudiamo con un esempio tratto da Abacus del 2007.

③ Otto nuotatori partecipano ad una gara in una piscina a otto corsie numerate. Sappiamo che:
- Nessuno dei nuotatori è arrivato in un posto che coincide con il numero della propria corsia.
- I nuotatori che gareggiavano in una corsia pari hanno ottenuto una posizione rappresentata da un numero pari e analogamente si sono comportati quelli che gareggiavano in una corsia dispari.
- Non ci sono stati ex-aequo.

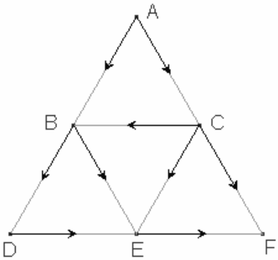
Quante diverse classifiche sono possibili?
In teoria nei posti dispari abbiamo le permutazioni dei numeri (delle corsie) 1, 3, 5, 7 e nei posti pari quelle dei numeri 2, 4, 6, 8. Da ciascuna delle 24 permutazioni dei numeri dispari, però dobbiamo eliminare quelle che hanno i cosiddetti "punti fissi", cioè quelle in cui uno dei 4 numeri occupa la propria posizione. Cioè quelle del tipo 1ABC, A3BC, AB5C, ABC7. Nel primo caso abbiamo ovviamente 3! casi, così come negli altri tre casi, solo che però, per esempio già nel secondo caso stiamo contando due volte il caso 13BC, che capita 2! volte. Allo stesso modo conteremo due volte i casi 1A5C, 1AB7, A35C, A3B7, AB57. Quindi in effetti abbiamo solo i seguenti 9 casi accettabili:

3175, 3571, 3715, 5173, 5713, 5731, 7135, 7513, 7531.

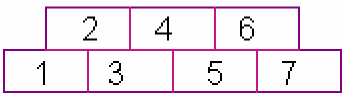
Allo stesso modo abbiamo altri 9 casi per le posizioni pari. Quindi in totale sono possibili $9 \times 9 = 81$ diverse classifiche, ottenute alternando gli elementi di una combinazione di dispari con quelli di una combinazione di pari.

Attività

1. ⓪ **(A2002)** Ad una festa partecipano 13 coppie. Ogni uomo stringe la mano a tutti i partecipanti tranne che alla propria moglie, le donne solo agli uomini. Quante strette di mano vengono effettuate?
2. ⓪ **(A2004)** 5 persone vogliono giocare a bridge, un gioco in cui una coppia gioca contro un'altra. Quante partite devono fare affinché ogni possibile coppia giochi contro ciascuna delle altre?
3. ⓪ **(B2003)** Quanti sono i numeri di tre cifre maggiori di 600, in cui la cifra delle unità vale la metà di quella delle centinaia mentre quella delle decine è diversa sia rispetto alle unità che alle centinaia?
4. ⓪ **(A2006)** Gli spigoli di un cubo hanno, in *cm*, misure intere. Il volume è meno di 1 metro cubo e non più piccolo di 1 decimetro cubo. Quante diverse misure potrebbe avere il cubo?
5. ⓪ Usando solo i cammini e le direzioni mostrate in quanti diversi modi possiamo andare da A ad F?



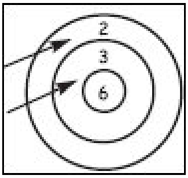
6. ⓪ Nel seguente gioco si deve andare dalla cella 1 alla cella 7, con le seguenti regole: da una cella si può andare ad una confinante solo se quest'ultima ha un numero superiore. In quanti diversi modi si può completare il percorso?



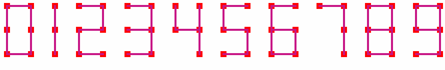
7. ◎ **(A1998)** Ci sono 5 lampade, ciascuna delle quali può essere accesa o spenta singolarmente. In quanti modi differenti puoi avere almeno una lampada accesa?
8. ◎ **(C2002)** Subesha scrive il numero di telefono di Davina in un foglio. Successivamente trova il foglio strappato e i numeri rimasti sono 89344. Subesha cerca di telefonare a Davina facendo tutti i numeri di 7 cifre che iniziano per 89344. Quante telefonate deve fare per essere sicura di centrare il numero corretto?
9. ◎ **(A1999)** Tre bambini, Izzy, Busy e Dizzy partecipano ad una gara, in cui sono gli unici concorrenti. Sapendo che nella classifica finale c'è uno e un solo pari merito, quante diverse classifiche possono esservi?
10. ◎ **(A2000)** In alcuni numeri il prodotto delle cifre è lo stesso del prodotto della prima e dell'ultima cifra. Quanti numeri del genere ci sono con 3 cifre?
11. ◎ **(A2001)** "Mi piace la tua cintura!", dice lo 0 all'8. "Vorrei esserti sempre accanto!". Quante volte ciò accade per i numeri da 1 a 1000?
12. ◎ **(A2002)** Quanti numeri di 3 cifre non hanno cifre zero?
13. ◎ **(A2004)** Un clown sale una scala con 6 scalini o l'uno dopo l'altro o saltando un solo scalino ogni tanto. In quanti modi differenti può salire la scala (ovviamente salire la scala significa arrivare al sesto gradino)?
14. ◎ **(A2005)** Quanti numeri di 3 cifre hanno come somma delle cifre 5?
15. ◎ **(B2003)** Il numero 145541 è un numero palindromo perché lo si può leggere allo stesso modo da sinistra a destra e da destra a sinistra. Inoltre, i numeri di due cifre consecutive che si possono leggere in questo numero, 14, 45, 55, 54, 41 sono tutti diversi. Trovate il numero palindromo più grande che abbia la stessa proprietà e formato solo da cifre 1, 2 e 3.
16. ◎ **(B2003)** Davide ha scritto tutti i numeri di 4 cifre utilizzando quelle che compaiono in 2003 (il numero può i-

niziare anche con lo zero). Quanti sono i numeri scritti da Davide?

17. ⓪ **(K2008)** Giovanna tira due frecce verso il bersaglio. Il punteggio ottenuto è la somma dei punteggi realizzati con le singole frecce (0 se la freccia non colpisce il bersaglio): per esempio nella figura vediamo una situazione nella quale il punteggio ottenuto è 5. Quanti diversi punteggi può ottenere Giovanna?

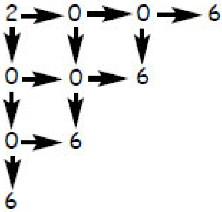


18. ① **(B2000)** Otto studenti (appartenenti ad una prima e ad una seconda classe superiore) hanno partecipato ad un concorso, facendo registrare dei punteggi tutti diversi. Il vincitore ha ottenuto 8 punti; l´ultimo 1 punto. Gli allievi di seconda hanno in complesso totalizzato 18 punti. Nella classifica, tra due studenti di seconda, ce n´è sempre almeno uno di prima. Gianni e Gianna sono gli unici allievi di prima a non essere separati (nella classifica) da uno studente di seconda. Quanti punti hanno totalizzato Gianni e Gianna insieme?
19. ① **(A2005)** Quanti diverse colonne a base rettangolare, possono costruirsi usando 24 cubi identici?
20. ① **(A2005)** In una stanza c'è un orologio digitale che mostra l'ora usando sempre 4 cifre da 00:00 a 23:59. Tenuto conto che le cifre si ottengono illuminando alcuni led, come mostrato in figura in cui un led è un segmento che collega due punti, a che ora avremo meno luce e a che ora più luce?

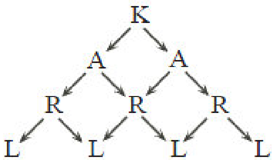


21. ① Con le cifre 1, 2, 3, 4 e 5, possiamo formare 120 diversi numeri di 5 cifre distinte. Se ordiniamo questi numeri dal più piccolo al più grande, quale sarà il 75°?

22. ① **(C1998)** In un gioco sono messi tre paletti a terra e si devono lanciare degli anelli su di essi. Centrare ciascuno dei tre anelli consente di ottenere rispettivamente, 1, 3 o 5 punti. Se lanciando tre anelli siamo sicuri che nessuno di essi cadrà fuori dai paletti, quanti diversi punteggi possono ottenersi? Ovviamente possiamo centrare uno stesso paletto con più di un anello.
23. ① **(K2006)** Osserva la figura. In quanti modi possiamo scrivere il numero 2006 seguendo le frecce?



24. ① **(A1997)** Quanti numeri di 4 cifre hanno almeno due cifre identiche?
25. ① **(C2007)** Nello schema seguente, in quanti diversi modi

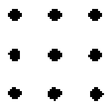


possiamo leggere il nome KARL?
26. ① **(OMI2008)** Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre in cui compare una e una sola volta la cifra 5 ed essa è la cifra più grande presente nel numero?
27. ① **(A1998)** Quanti numeri fra 1 e 1998 hanno almeno una cifra uguale a 7?
28. ① **(A1998)** Charlie ha 5 palle rosse, 3 bianche e 2 verdi. Le palle sono identiche tranne che nel colore. Vuole metterle in 2 scatole, una adatta a contenere 4 palle, e una adatta a contenerne 6. In quanti modi diversi può farlo?
29. ① **(A2002)** Quanti numeri di 4 cifre hanno almeno una cifra che si ripete?

30. ① **(A2007)** Quanti numeri pari di 3 cifre hanno la cifra delle centinaia che è somma delle altre due?
31. ① Quanti diversi numeri di 4 cifre hanno le cifre a due a due uguali?
32. ① **(C2010)** Quante diverse coppie (m; n) possono formarsi usando numeri dall'insieme {1, 2, 3, …, 20}, in modo che sia $m < n$ e $m + n$ sia pari?
33. ② **(K2008)** Vuoi sistemare in ogni posto vuoto dell'allineamento 2_ _8 una cifra in modo da ottenere un numero di quattro cifre divisibile per 3. Quante scelte hai per la coppia (ordinata) di cifre da inserire?
34. ② **(A2001)** Abbiamo una griglia 3×3 e vogliamo colorarla con 3 diversi colori, in modo che ogni riga e ogni colonna contengano tutti i colori. In quanti diversi modi possiamo ottenere quanto richiesto?
35. ② **(A2005)** Ann, Beatrix, Cecilia, Diana ed Emma vanno al cinema e vogliono sedere in 5 posti adiacenti. Inoltre Ann vuole sedere accanto a Beatrix e Diana accanto a Emma. Invece Cecilia non vuole sedere vicino a Emma. In quanti diversi modi possono sedersi?
36. ② **(A1998)** Quanti numeri di 4 cifre contengono entrambe le cifre 1 e 2?
37. ② **(A2000)** A Lalaland non vi sono due cittadini che abbiano gli stessi denti mancanti. Qual è al massimo la popolazione di questo magico paese, se ognuno ha un massimo di 32 denti e solo il presidente ne ha esattamente 32?
38. ② **(A1998)** In un torneo di tennis ognuno gioca contro ciascuno degli altri. Dato che le partite sarebbero troppe, gli organizzatori invitano 4 giocatori in meno e così facendo riducono di 50 le partite. Quanti giocatori partecipano al torneo?
39. ② **(A1999)** Un biglietto di autobus è formato da una griglia 3×3 contenente nell'ordine i numeri da 1 a 9. La macchina obliteratrice buca 4 dei 9 numeri. Se usassimo una macchina obliteratrice che buca 5 numeri, quale delle

due sarebbe in grado di essere usata per più giorni, obliterando ogni giorno in modo diverso?

40. ② **(A2001)** Quanti numeri di 4 cifre hanno somma delle cifre uguale a 4?
41. ② **(C2002)** I numeri 226 e 318 hanno cifre il cui prodotto è 24. Quanti numeri di 3 cifre hanno questa proprietà?
42. ② **(C2004)** x rappresenta il numero intero ABC e il numero intero CBA, in cui ciascuna lettera rappresenta una cifra con A e C diversi da 0. Se $x - y = 495$, quanti diversi x ci sono?
43. ② **(A2001)** In quanti diversi modi possiamo distribuire 6 libri a 4 persone? Si accetta anche che qualcuno dei 4 possa non ricevere alcun libro.
44. ② In quanti modi differenti 4 interruttori adiacenti possono essere posizionati, in modo che non ve ne siano due adiacenti spenti?
45. ② Quanti numeri di 4 cifre hanno la somma delle cifre pari a 5?
46. ② **(A2002)** Un ragno sta facendo una ragnatela, prendendo 3 dei 9 fiori che sono piantati secondo il diagramma seguente, e circondandoli con un filo. In questo modo costruisce diversi triangoli. Precisamente quanti?



47. ② **(A2000)** Cinque ragazze e tre ragazzi giocano a pallavolo. In quanti diversi modi possono farsi due squadre composte da 4 giocatori ciascuna, in modo che in ogni squadra ci sia almeno un maschio?
48. ② **(A2005)** 4 bambini devono dividersi fra loro 6 mele. Se qualcuno può anche non riceverne nessuna e qualcuno può prenderle anche tutte, in quanti diversi modi possiamo fare ciò?
49. ② **(A2006)** In quanti diversi modi si può scrivere 8 usando solo addendi uguali a 1 o 2, se l'ordine degli addendi è

importante? (per esempio 1+1+2+2+2 è diverso da 1+2+1+2+2).

50. ② **(A2000)** Ci sono 12 ragazze e 15 ragazzi che partecipano ad una festa. In quanti diversi modi possiamo scegliere 4 coppie di ballerini, maschio e femmina, fra di loro?
51. ② **(A2000)** 5 coppie devono essere divise in due gruppi in modo che uno contenga 6 persone e fra di loro almeno due delle coppie iniziali. In quanti diversi modi possiamo effettuare tale suddivisione?
52. ② **(A2004)** Olga scrive 5 numeri interi, non per forza diversi, su un pezzo di carta. Quindi osserva che in questo modo se c'è scritto un numero, c'è sempre anche il suo quadrato. Che numeri ha scritto Olga e in quanti modi diversi lo ha potuto fare? Non importa l'ordine in cui ha scritto i numeri.
53. ② **(B2008)** Quando in una gara ci sono solo due cavalli, ci sono tre piazzamenti possibili: due in cui non c'è parità e uno in cui i due cavalli arrivano a pari merito. Quando la gara è fra tre cavalli, ci sono tredici piazzamenti possibili : sei in cui non c'è alcuna parità, sei in cui due cavalli sono a pari merito (essendo il terzo davanti o dietro a loro) e uno in cui i tre cavalli sono tutti a pari merito. Quando corrono 5 cavalli, quanti piazzamenti possibili ci sono?
54. ② Quanti degli anagrammi, anche privi di senso, della parola Matematica, iniziano per M?
55. ③ **(A1998)** C'è una scala con 10 gradini, in quanti diversi modi si può salire se si possono salire uno o due gradini alla volta?
56. ③ **(A1999)** Due associazioni ciclistiche organizzano una gara. Prima di partire ciascuno saluta tutti gli altri. Sappiamo che ci sono stati un totale di 231 strette di mano, ma 119 di queste fra appartenenti alla stessa associazione. Quanti membri ha ciascuna associazione?
57. ③ **(A2001)** Arnold Schoenberg, un grande musicista, inventò il cosiddetto metodo dodecafonico, in cui le 12 note

di una scala cromatica (C,C#,D,D#,E,F,F#,G,G#,A,A#,B) sono sistemate in una riga musicale. Vogliamo sapere in quanti modi possiamo sistemare le note sotto la condizione che C e C# siano separate fra loro da almeno un'altra nota e non occupino né l'inizio, né la fine della riga.

58. ③ **(A2005)** In un'urna mettiamo 6 palle ciascuna di un colore diverso, quindi estraiamo senza rigenerazione finché non otteniamo la palla rossa. Se non importa l'ordine di estrazione, in quanti diversi modi possiamo effettuare tali estrazioni?
59. ③ **(A1999)** Dato il numero N = 1! + 2! + 3! + … + 1999!, quali sono le sue ultime due cifre?
60. ③ **(A2001)** In quanti diversi modi possiamo sistemare 8 diversi libri su 3 diversi scaffali? L'ordine dei libri in ogni scaffale è rilevante e uno o più degli scaffali può lasciarsi vuoto.

Successioni numeriche

Consideriamo adesso particolari sequenze di numeri. Intanto chiariamo che una sequenza o successione numerica è un insieme ordinato di numeri reali. Ciò significa che ogni numero ha una ben determinata posizione, che lo determina in modo univoco. Abbiamo cioè il primo, il quinto, il trentesimo numero della sequenza, e così via. Perciò ogni numero lo possiamo individuare con la posizione che occupa, così per esempio nella sequenza 1, 3, 5, 7, 9, … dei numeri dispari positivi, possiamo dire che il numero 5 è il terzo della sequenza. In generale possiamo indicare tutta la sequenza con il simbolo $\{a_n\}$, perciò nel nostro esempio avremo $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=5$ e così via..

Fra le sequenze possiamo considerarne alcune che obbediscono a semplici regole aritmetiche. Per esempio nella sequenza dei numeri dispari, ogni elemento è uguale al precedente aumentato di 2.

Diciamo **progressione aritmetica** una successione numerica in cui la differenza tra due elementi consecutivi è costante. La differenza costante *d* si chiama **ragione** della progressione.

La successione {4, 7, 10, 13, …} è una progressione aritmetica di ragione 3, poiché ogni numero si ottiene dal precedente aggiungendovi 3. Infatti 7 = 4+3, 10 = 7+3, … Invece la successione {4, 7, 12, 19, …} non è una progressione aritmetica, perché 7=4+3, mentre 12=7+5.

Proprio per la loro stessa definizione possiamo ottenere semplici relazioni fra gli elementi di una stessa progressione aritmetica.

Nella progressione aritmetica {4, 7, 10, 13, …}, possiamo trovare facilmente il suo ventesimo termine senza bisogno di calcolare i precedenti 19 (tranne il primo, ovviamente). Infatti possiamo anche scrivere:

$$\{4, 4+3, 4+2\times3, 4+3\times3, 4+4\times3,\ldots\}$$

Quindi il ventesimo termine è: $4 + 19 \times 3 = 61$

Il precedente risultato conduce alla seguente legge generale:

Teorema In una progressione aritmetica di ragione d, l'elemento di posto k si ottiene aggiungendo al primo elemento $(k - 1)$ volte la ragione d, in simboli:

$$a_k = a_1 + (k - 1) \times d$$

Facilmente si trova anche una legge che lega fra loro due qualsiasi elementi.

Teorema Fra due distinti elementi a_p e a_t di una stessa progressione aritmetica di ragione d, vale la seguente relazione:

$$a_p = a_t + (p - t) \times d\ .$$

Vediamo alcuni esempi.
Data la progressione $\{7, 12, 17, 22, \ldots\}$ di ragione $d = 5$, vogliamo trovare il suo 15° elemento. Tenuto conto del risultato precedente, abbiamo:

$$a_{15} = 7 + (15 - 1) \times 5 = 7 + 14 \times 5 = 7 + 70 = 77$$

Sia adesso la progressione aritmetica in cui $a_4 = 2$ e la ragione $d = 3$, vogliamo trovare l'elemento di posto 12. Abbiamo:

$$a_{12} = 2 + (12 - 4) \times 3 = 2 + 8 \times 3 = 2 + 24 = 26$$

Anche il calcolo della somma dei termini di una progressione aritmetica risulta facilitato.

Vogliamo calcolare velocemente la somma dei primi 50 numeri interi consecutivi, che costituiscono una progressione aritmetica di ragione 1. Osserviamo che possiamo accoppiare i 50 numeri nel seguente modo:

$$(1 + 50) + (2 + 49) + (3 + 48) + \ldots + (25 + 26) =$$

$$= 51 + 51 + 51 + \ldots + 51$$

Gli addendi sono tutti uguali e sono in numero di 25, quindi la somma cercata è $51 \times 25 = 1275$.

Generalizzando il precedente esempio si ottiene il seguente risultato.

La somma dei primi n numeri interi positivi è $\dfrac{n\times(n+1)}{2}$.

Se la ragione invece che 1 fosse un altro numero, cosa accadrebbe? Per esempio se vogliamo calcolare la somma dei primi 50 numeri dispari consecutivi?

Possiamo scrivere:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 95 + 97 + 99 =$$

$$= (1 + 99) + (3 + 97) + (5 + 95) + \ldots + (49 + 51) =$$

$$= 100 + 100 + 100 + \ldots + 100 = 100 \times 25 = 2500$$

Vogliamo trovare la somma dei primi k elementi di una progressione aritmetica di ragione d. Cioè di

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = a_1 + a_1 \times d + \ldots + a_1 \times (k-1) =$$
$$= k \times a_1 + d \times \left[1 + 2 + \ldots + (k-1)\right] =$$
$$= k \times a_1 + d \times \frac{k \times (k-1)}{2} = k \times \frac{2a_1 + d \times (k-1)}{2} =$$
$$= k \times \frac{a_1 + a_1 + d \times (k-1)}{2} = k \times \frac{a_1 + a_k}{2}$$

Consideriamo un altro genere di successioni numeriche, affini alle progressioni aritmetiche.

Diciamo **progressione geometrica** una successione numerica in cui il rapporto tra due elementi consecutivi è costante, il rapporto costante q si chiama **ragione** ed è sempre diverso da zero.

Le successive potenze di un numero, per esempio di 2, sono progressioni geometriche di ragione la base comune. Infatti la legge generale è $a_n = 2^n$, quindi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

Anche per le progressioni geometriche possiamo determinare semplici formule per determinare un elemento conoscendone un altro e la sua posizione.

Data la progressione geometrica di ragione $\frac{1}{2}$, il cui quinto elemento è 4, vogliamo trovare il suo decimo elemento. Cominciamo a costruire il quinto elemento a partire dal quarto:

$$4 \times \frac{1}{2} = 2$$

Il sesto elemento è

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

Ma è anche

$$4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Quindi facilmente si ha che il settimo elemento, a partire dal quarto è

$$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

E pertanto il decimo elemento sarà:

$$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=4\times\frac{1}{64}=\frac{1}{16}$$

Generalizzando l'esempio otteniamo il seguente risultato.

Teorema Fra due distinti elementi a_p e a_t di una stessa progressione geometrica di ragione q, vale la seguente relazione:

$$a_p=a_t\times q^{p-t}\ .$$

Anche per queste progressioni possiamo trovare semplici regole per il calcolo delle somme.

Consideriamo un esempio.
Un'antica leggenda narra che l'inventore degli scacchi volesse essere ricompensato con 1 chicco di riso posto nella prima casella della scacchiera, con 2 nella seconda, 4 nella terza e così via sempre raddoppiando fino a 2^{63} chicchi nell'ultima. Già questo numero è enorme, vale circa $9\cdot 10^{18}$, ma vogliamo calcolare quanti chicchi in realtà erano richiesti. Dobbiamo cioè sommare i primi 64 termini della progressione geometrica di ragione 2 e primo termine 1, ossia di

$$S=1+2+2^2+...+2^{62}+2^{63}$$

Osserviamo che moltiplicando ciascun termine per 2 otteniamo il doppio della somma richiesta:

$$2S=2+2^2+...+2^{63}+2^{64}$$

Questa somma è molto simile alla precedente, differendo da essa solo per due addendi, pertanto se sottraiamo la prima dalla seconda troveremo facilmente la somma richiesta:

$$2S - S = \left(2 + 2^2 + ... + 2^{63} + 2^{64}\right) - \left(1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{62} + 2^{63}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S = 2^{64} - 1 \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}.$$

Con la stessa procedura mostrata nell'esempio otteniamo il seguente risultato generale.

Teorema La somma di k termini consecutivi di una progressione geometrica di ragione q, a partire da quello di posto p è:

$$S_{p,k} = \sum_{m=p}^{p+k} a_m = a_p \cdot \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Consideriamo adesso qualche quesito tratto da gare matematiche. Vediamone uno tratto dalla Canadian Mathematics Competition del 2000.

⓪ Nella sequenza {10, a, 30, b, c}, ogni numero a partire dal 30 è il doppio della somma dei due numeri che lo precedono. Quanto vale c?
Se 30 è il doppio di (10 + a), vuol dire che 10 + a = 15, cioè a= 5. Allora b = 2 × (30 + 5) = 70, c = 2 × (30 + 70) = 200.
Sempre dalla stessa gara, ma del 2003, consideriamo un quesito più difficile.
① Costruiamo un triangolo di numeri come mostrato di seguito

1 2
1 3 2
1 4 5 2
1 5 9 7 2
………..

in cui il primo numero di ogni riga è sempre 1 e l'ultimo è sempre 2, i rimanenti numeri invece si ottengono come nel triangolo di Tartaglia, sommando i due numeri della riga precedente che occupano la stessa posizione e la posizione precedente. Per esempio il 9 della quarta riga è somma di 4 e 5 della terza riga. Se continuiamo il triangolo fino alla tredicesima riga, quanto fa la somma di tutti i numeri di questa riga?
Sommiamo gli elementi di ogni riga, ottenendo 3, 6, 12, 24. Non è difficile capire che ogni numero è il doppio del precedente e questa regola continuerà sempre. Ciò significa che la somma degli elementi della tredicesima riga sarà il doppio di quelli della dodicesima, il quadruplo di quelli della undicesima, otto volte quelli della decima e così via. Cioè 2^{12} volte quelli della prima riga. Quindi $3 \times 2^{12} = 3 \times 4096 = 12288$.

Un quesito ancora più difficile lo prendiamo sempre dalla gara canadese, ma del 1998.

② Usando solo le cifre 1, 2, 3, 4 e 5, abbiamo costruito una sequenza nel modo seguente: un 1, due 2, tre 3, quattro 4, cinque 5, sei 1, sette 2, e così via. La successione è perciò
1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, ...
Quanto il 100° numero scritto?
Le cifre della successione sono formate da gruppi di cifre uguali. Nei primi n gruppi ci sono $1+ 2 + 3 + ... + n$ cifre. Dobbiamo quindi capire in quale gruppo si trova la centesima cifra. Poiché $1+2+...+n=\dfrac{n\times(n+1)}{2}$ e

$$1+2+...+13=\frac{13\times 14}{2}=91; 1+2+...+14=\frac{14\times 15}{2}=105$$

vuol dire che il centesimo elemento sta nel quattordicesimo gruppo. Poiché $14 = 5 \times 2 + 4$, questo gruppo contiene solo cifre 4, quindi la centesima cifra è 4.

Concludiamo con un quesito assegnato ai Kangourou del

2001.

③ Le celle di una griglia di 43 righe × 43 colonne sono colorate con 4 colori 1, 2, 3, 4 come mostrato nella figura. Quale colore è usato più spesso rispetto ad ognuno degli altri tre?

1	2	3	4	1	2		⋯	
2	3	4	1	2	3		⋯	
3	4	1	2	3			⋯	
4	1	2	3				⋯	
1	2	3					⋯	
2	3						⋯	
							⋯	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	

Dato che 43 = 4 × 10 + 3, vuol dire che considerando la sottotabella formata dalle prime 40 righe e 40 colonne abbiamo i colori usati lo stesso numero di volte. Considerando le prime 40 celle delle colonne da 41 a 43 e quelle delle righe da 41 a 43, analogamente avremo usato lo stesso numero di colori. In pratica quindi dobbiamo considerare solo l'ultima sottotabella destra formata da 9 celle. Quali sono i suoi elementi? Non è difficile capire che sono quelli della prima sottotabella 3 × 3 in alto a sinistra.

1	2	3
2	3	4
3	4	1

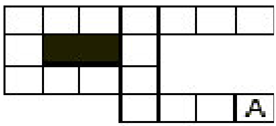
Come si vede usiamo i colori 1, 2 e 4 per due volte e il colore 3 per tre volte, che è perciò il più usato.

Attività

1. ◎ Scriviamo i numeri interi positivi nel modo seguente

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 3 \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

   in cui in ogni riga scriviamo un numero in più che nella riga precedente. Qual è l'ultimo numero della decima riga?
2. ◎ Consideriamo la sequenza dei primi 50 numeri interi. Sommiamo fra loro i numeri pari e a questa somma sottraiamo la somma di tutti i numeri dispari. Quanto otteniamo?
3. ◎ **(C2001)** Quanto vale il 50° termine della successione 5, $6x$, $7x^2$, $8x^3$, $9x^4$, … ?
4. ◎ (**B2002**) Alla partenza, una pulce si trova nella casella A. Ad ogni secondo, essa si sposta dalla casella dove si trova in una vicina (con un lato in comune). Può scegliere una qualsiasi direzione, ma non può mai fare dietro–front (e neanche spostarsi nelle caselle annerite). Segnate con una crocetta tutte le caselle nelle quali si può trovare la pulce dopo 15 secondi.

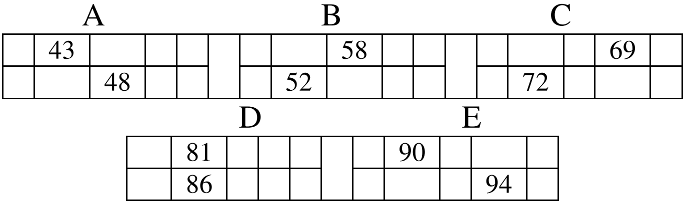


5. ◎ **(K2002)** Utilizzando le lettere A, B, C componi la sequenza formata da 2002 lettere che inizia con A B C B A B C B A B C B A B C B A……. e prosegue ripetendo sempre ABCB. Quali sono le ultime tre lettere?
6. ◎ **(K2004)** Si considera la seguente sequenza di numeri: 11, 18, 25, 32, 39, …(ogni numero, a partire dal secondo, è ottenuto aggiungendo 7 al numero che lo precede). Se

sottraiamo 3 ad ogni numero di questa sequenza, ne otteniamo un'altra. Quale dei seguenti numeri appare in quest'ultima? A) 221 B) 222 C) 223 D) 224 E) 225

7. ⓪ **(K2010)** Camilla ha scritto tutti i numeri interi da 1 a 100 inclusi, mettendone uno per ogni cella di una griglia con 5 colonne, procedendo in ogni riga da sinistra a destra e partendo dalla prima riga. La parte alta di questa griglia ti è mostrata dalla figura. Paolo ha ritagliato una parte della griglia e poi ha cancellato tutti i numeri presenti in quella parte tranne due. Quale delle seguenti figure rappresenta la parte ritagliata da Paolo?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
…	…	…	…	…



8. ① **(A1998)** Il primo elemento di una successione numerica è 2, il secondo 3. Gli elementi successivi si calcolano sottraendo i due elementi precedenti, cioè $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. Quindi il terzo è 3 – 2 = 1, il quarto è 1 – 3 = –2, e così via. Quanto fa la somma dei primi 1998 elementi della successione?

9. ① **(A1997)** Nella successione seguente ogni elemento, a parte il primo, si ottiene sommando i quadrati delle cifre del numero precedente. Per esempio il numero che segue 16 è $1^2 + 6^2 = 37$. qual è il 100° numero?

128, 69, 117, 51, 26, 40, 16, 37, …

10. ① **(A1998)** Una segretaria ricopia le lettere del suo capo, nell'ordine in cui quello le mette una sull'altra sulla sua

scrivania. Ovviamente la segretaria può già trovare lettere da ricopiare e mentre ne ricopia una il capo ne può mettere altre. Quindi può capitare che ricopi prima una lettera messa lì dopo di un'altra che sta sotto. Se un giorno il capo ha messo 5 lettere da ricopiare nell'ordine 1 – 2 – 3 – 4 – 5, quale dei seguenti ordini di ricopiatura è impossibile?

i. 1 – 2 – 3 – 4 – 5
ii. 2 – 4 – 3 – 5 – 1
iii. 3 – 2 – 4 – 1 – 5
iv. 4 – 5 – 2 – 3 – 1
v. 5 – 4 – 3 – 2 – 1.

11. ① **(A1998)** Usando le cifre da 1 a 6 ho scritto un numero di 4 cifre, non per forza distinte. Un mio amico cerca di indovinare e dice 4215, gli dico che due cifre sono giuste, ma una sola è nella giusta posizione. Allora dice 2365. Di nuovo due cifre le ha indovinate ma una sola è nella giusta posizione. Mi dice allora 5525 e tutte le cifre sono sbagliate. Sapete indovinare il mio numero?
12. ① **(K2004)** In figura sono allineate 9 caselle: nella prima compare il numero 7 e nell'ultima il numero 6. Che numero dobbiamo scrivere nella seconda, se vogliamo che, per ogni terna di caselle consecutive, la somma dei numeri che vi compaiono sia 21?

7								6

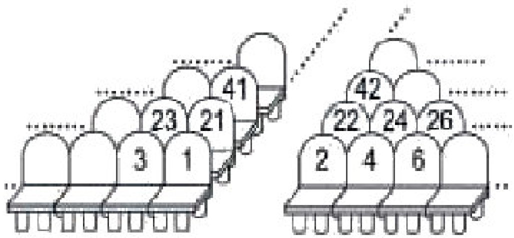
13. ① **(A2006)** Costruiamo una successione di numeri scrivendo l'espressione decimale di 18/55, aggiungendo ogni volta una cifra in più, cioè: 0,3; 0,32; 0,327; 0,3272; …Vogliamo sapere quanto fa la somma delle cifre del 123° elemento della successione. Inoltre vogliamo sapere se nella successione c'è un elemento la somma delle cui cifre è 2006.
14. ① **(K2002)** Qual è il massimo valore della "somma delle cifre della somma delle cifre" di un numero di 3 cifre?
15. ① **(K2008)** Una scatola contiene sette carte numerate da 1 a 7. Due saggi pescano a caso delle carte dalla scatola: il

primo ne prende tre, il secondo due delle rimanenti; le ultime due restano chiuse nella scatola. Il primo saggio, dopo aver guardato solo i numeri scritti sulle carte da lui pescate, dice al secondo: "Sono certo che la somma dei numeri riportati sulle tue carte è pari". Quanto vale la somma dei numeri riportati sulle carte pescate dal primo saggio?

16. ① **(K2009)** In una tabella 4 × 2 due diversi numeri interi positivi sono stati inseriti nella prima riga. Ogni riga successiva contiene la somma e la differenza (maggiore meno minore) dei due numeri scritti nella riga precedente: rispettivamente, sotto il minore si scrive la somma e sotto il maggiore la differenza. In una tabella 11 × 2, costruita allo stesso modo, i numeri dell'ultima riga sono 64 e 96. Qual è la somma dei numeri della prima riga?

1	5
6	4
2	10
12	8

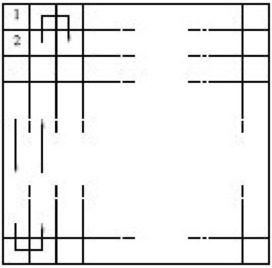
17. ① **(K2010)** I posti in un teatro sono numerati come indica la figura. Daniela ha prenotato il posto numero 100. Flavia vuole sedersi il più vicino possibile a lei, ma sono rimasti solo 5 posti liberi: 76, 94, 99, 104 e 118. Quale le conviene prenotare?



18. ② **(AHSME 1953)** In una progressione geometrica di termini positivi, ogni termine è uguale alla somma dei due termini che lo seguono. Quanto vale la ragione?

19. ② **(AHSME 1968)** Gli angoli interni di un poligono convesso sono in progressione aritmetica di ragione 5°, se l'angolo maggiore è 160°, quanti lati ha il poligono?

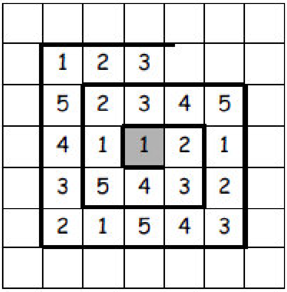
20. ② **(AHSME 1966)** Consideriamo le somme dei primi n termini delle progressioni {8, 12, 16, ...} e {17, 19, 21, ...}. Per quali valori di n le due somme sono uguali?
21. ② **(C2010)** Una successione è formata da 2010 termini, ognuno di una unità in più rispetto al precedente; la loro somma è 5307. Quanto vale la somma dei soli termini che occupano una posizione dispari?
22. ② **(A2001)** Ho costruito una successione numerica con la seguente regola. Se un numero è dispari, il successivo sarà aumentato di 3, se è pari, il successivo è la sua metà. Sapendo che il primo elemento è dispari e il quarto è 27, calcolare il primo.
23. ② **(A2001)** Una banconota ha un numero di serie di 14 cifre, che ha questa particolarità: sommando comunque tre cifre consecutive otteniamo sempre 13. La seconda cifra è 2, la tredicesima è 4. Qual è l'intero numero di serie?
24. ② **(C2006)** La somma di 10 numeri interi consecutivi è S. Moltiplicando per 10 il più piccolo dei numeri otteniamo T. Quanto vale S – T?
25. ② **(A1997)** Scriviamo i numeri naturali uno dopo l'altro: 12345678921011121314… quale cifra scriveremo per 1997^{a}?
26. ② **(A1998)** Scriviamo una successione infinita di numeri partendo da 3, quindi ogni numero successivo si ottiene raddoppiando l'ultima cifra del numero precedente e sommandovi il numero che si ottiene eliminando la cifra delle unità sempre dal numero precedente. Così otteniamo
$$6;\ 12;\ 2 \times 2 + 1 = 5;\ 10;\ 2 \times 0 + 1 = 1;\ \ldots$$
Che numero sarà il 1998°?
27. ② **(OMI2008)** Le caselle di una scacchiera quadrata sono numerate come illustrato nella figura a fianco. Nella seconda colonna si trova la casella numero 38 e la casella della terza colonna che sta sulla sua stessa riga ha il numero 43. Quante caselle ha la scacchiera?



28. ② **(C2007)** Alla segreteria della CMC usano questo metodo di smistamento della posta. A partire dalle 12:00, ogni cinque minuti si ripete la seguente procedura
Passo 1 – Arrivano 3 lettere e sono messe una sull'altra, la prima in fondo, l'ultima in cima.
Passo 2 – Le due lettere in cima vengono smistate.
Si ripete questa procedura finché non sono arrivate 36 lettere. A questo punto ogni cinque minuti si smistano le prime due lettere in cima. A che ora viene smistata la 13ma lettera arrivata?
29. ③ **(AHSME 1993)** In una progressione aritmetica di termine generale a_n, si ha: $a_4 + a_7 + a_{10} = 17$ e $a_4 + a_5 + ... + a_{14} = 77$. Se $a_k = 13$, determinare k.
30. ③ **(A1997)** Scriviamo 1997 cifre una dopo l'altra in modo che comunque consideriamo una coppia di cifre adiacenti otteniamo un numero divisibile per 17 o per 23. L'ultima cifra scritta è 7. Qual è la prima cifra?
31. ③ **(A2000)** Scriviamo la seguente sequenza:
1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 2, 1, …
in cui dopo ogni 1 vi è un numero di 2 superiore di una unità al gruppo precedente. Quanto fa la somma dei primi 1234 elementi di questa sequenza?
32. ③ **(A2007)** Prendiamo 3 monete e su ciascuna delle loro facce scriviamo un diverso numero scelto da 6 numeri consecutivi di una cifra. Poi lanciamo le tre monete in aria e vediamo che mostrano i numeri 6, 7 e 8. quindi lanciamo di nuovo le monete per 4 volte. Stavolta sommiamo i nu-

meri che vediamo, ottenendo 16, 17, 20 e 23. Quali sono i numeri e come sono scritti su ogni moneta?

33. ③ **(C2006)** Determinare la somma di tutti i numeri interi da 1 a 2006 che non contengono la cifra 7.
34. ③ **(K2007)** Le cifre della successione 1234512345123451 … riempiono le celle su un foglio con una legge del tipo a spirale, partendo dalla cella segnata (v. figura). Quale cifra si viene a trovare sulla cella che sta esattamente 100 celle sopra quella ombreggiata?



35. ③ **(AHSME 1974)** In una progressione geometrica la differenza fra il quinto ed il quarto termine è 576 e la differenza fra il secondo ed il primo termine è 9. Quanto vale la somma dei primi cinque termini?

Calcolo delle Probabilità

Dato un fenomeno F, diciamo suo **spazio degli eventi** *E* l'insieme di tutti i possibili modi, diversi fra di loro, in cui F può presentarsi.
Ogni sottoinsieme di uno spazio di eventi è un **evento**.

Diciamo numero dei **casi possibili** di un dato evento la cardinalità dello spazio di eventi *E* a cui esso appartiene; numero dei **casi favorevoli** al suo accadere, la propria cardinalità.

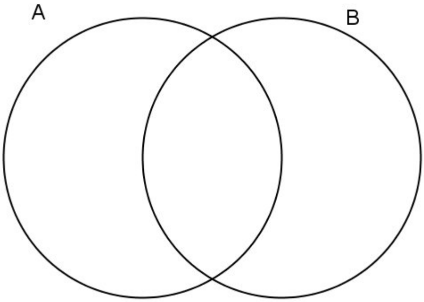
Dato un evento il cui spazio degli eventi sia finito, diciamo sua **probabilità secondo Laplace** il rapporto fra il numero dei casi favorevoli al suo verificarsi e quello dei casi possibili, nell'ipotesi che tutti i casi abbiano la stessa possibilità di accadere.

Per esempio nel lancio di un dado regolare a sei facce, lo spazio degli eventi è {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Se consideriamo l'evento "esce un punteggio pari", esso è il sottoinsieme {2, 4, 6}, i casi possibili sono 6, quelli favorevoli sono 3, quindi la probabilità che lanciando un dado venga fuori un punteggio pari è 3/6 = 1/2.

Possiamo considerare probabilità di più eventi, per esempio eventi unione o eventi intersezione, essendo gli eventi degli insiemi. Basta considerare le relazioni fra insiemi per potere stabilire il seguente risultato.

Teorema La probabilità dell'evento unione di due eventi A e B è $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Infatti in generale due insiemi si trovano nella posizione seguente



Quindi il numero di elementi dei due insiemi è dato dagli elementi di A più quelli di B, diminuiti degli elementi comuni, perché se no questi ultimi elementi li conteremmo due volte.

Per esempio, se nello spazio degli eventi del lancio di un dado, consideriamo A come l'uscita di un punteggio pari e B come l'uscita di un punteggio compreso tra 2 e 5, I casi possibili saranno $|A| = |\{2, 4, 6\}| = 3$ e $|B| = |\{2, 3, 4, 5\}| = 4$, ma in questo caso, se dicessimo che $|A \cup B| = 3 + 4$ sbaglieremmo perché in questo modo abbiamo contato due volte $\{2, 4\}$, cioè $|A \cap B|$. Quindi $|A \cup B| = 3 + 4 - 2 = 5$. Quindi la probabilità cercata è 5/6.

È chiaro che nell'ipotesi in cui $A \cap B = \varnothing$ allora la formula precedente diviene più semplicemente

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Eventi per i quali si ha $A \cap B = \varnothing$ si dicono **incompatibili**.

Se da un'urna estraiamo due palline, ci sono due modi di fare ciò. Cioè possiamo estrarre la prima pallina, guardarla registrando quello che ci interessa indagare (il colore, il numero scritto, …) e poi rimetterla nell'urna. Oppure possiamo levare la pallina dall'urna e poi estrarre la seconda pallina. Nel primo caso gli eventi non hanno alcuna relazione uno con l'altro, nel senso che la seconda estrazione non è influenzata dalla prima.

Invece nel secondo caso la seconda estrazione dipende dalla prima, perché se per esempio l'urna è quella dei numeri del lotto, se abbiamo estratto il numero 13 per primo, non lo potremmo estrarre per secondo.

Dal punto di vista probabilistico diciamo che due eventi A e B sono **probabilisticamente indipendenti** se

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Per esempio qual è la probabilità che i primi due numeri estratti sulla ruota di Napoli siano 1 e 2? Gli eventi non sono indipendenti. La probabilità che il primo numero sia 1 è 1/90, la probabilità che il secondo sia 2 è 1/89. La probabilità che siano 1 e 2 i primi due quanto vale? Quante coppie possiamo scegliere tra 90? $\binom{90}{2} = \frac{90 \times 89}{2} = 45 \times 89$, e questo è il numero di casi possibili. Quante di queste coppie sono (1, 2)? Una sola. Quindi la probabilità è $\frac{1}{45 \times 89}$. Questo numero è diverso da $\frac{1}{89} \times \frac{1}{90}$.

Invece se lanciamo un dado e una moneta, con quale probabilità otteniamo 6 con il dado e testa con la moneta? La prima probabilità è 1/6, la seconda 1/2. Consideriamo l'intersezione. Tutte le coppie sono 12: {(1, T), (2, T), …, (6, T), (1, C), …, (6, C)}. Una sola di queste è quella cercata, quindi la probabilità è 1/12, che stavolta è uguale a 1/6 × 1/2. Quindi gli eventi sono probabilisticamente indipendenti.

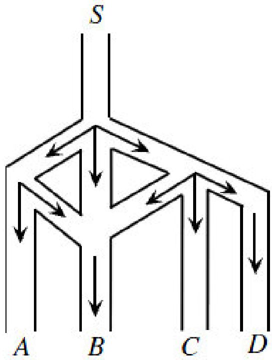
Vediamo adesso qualche quesito tratto dalle gare.
Cominciamo con un quesito assegnato alla Canadian Mathematics Competition del 2001.

⓪ Un dado regolare ha sulle sue facce i punteggi 1, 1, 1, 2, 3, 3. Se lo lanciamo, con che probabilità otteniamo un punteggio dispari?
Un solo punteggio è pari, quindi la probabilità di ottenere un punteggio dispari è 5/6.

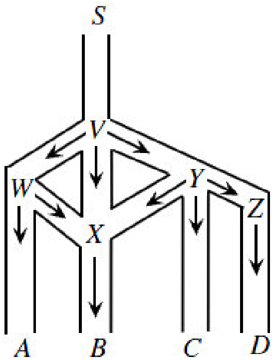
Proseguiamo con un quesito assegnato alla stessa gara ma nel 1997.

① Tre palle portano i numeri 1, 2, e 3 rispettivamente. Mettiamo le palle in un sacchetto, quindi ne estraiamo una per 3 volte, ogni volta segnando il numero estratto e rimettendola nel sacchetto. Con che probabilità otteniamo 3 numeri la cui somma è minore di 8?
Ogni volta che estraiamo una palla possono uscire 3 numeri diversi, quindi in totale possono uscire $3^3 = 27$ diverse terne. Questi sono i casi possibili. Vediamo quali casi sono favorevoli. Il massimo ottenibile è 9 e si ottiene in un modo solo: estraendo sempre la palla numero 3. Possiamo ottenere 8 estraendo due volte la palla 3 e una volta la palla 2, il che può farsi in 3 modi diversi, a seconda che la palla 2 venga estratta per prima, seconda o terza. Quindi dei 27 casi 4 non sono favorevoli, perciò 23 sono favorevoli e la probabilità cercata è 23/27.

Vediamo ora un quesito assegnato nell'edizione del 2005.
② Il criceto Harry è dentro un labirinto, come in figura, che inizia in S. Harry si può muovere solo nella direzione delle frecce. Ad ogni bivio ha la stessa probabilità di scegliere una delle due o tre direzioni indicate; con che probabilità Harry arriverà in B?



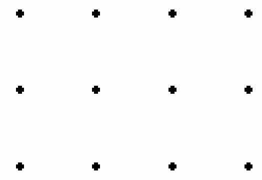
Consideriamo la seguente figura, in cui abbiamo etichettato i bivi



Per arrivare a B, Harry deve passare da X. A X può arrivare da W, da Y, oppure direttamente da V. Quindi abbiamo a che fare con una probabilità unione di eventi incompatibili, dobbiamo perciò semplicemente sommare le tre probabilità.
Da V ci arriva con probabilità 1/3. Per gli altri cammini dobbiamo considerare l'intersezione di più eventi fra loro indipendenti, quindi la probabilità è prodotto delle singole probabilità. Perciò da W Harry arriva ad X con probabilità $1/3 \times 1/2 = 1/6$, infine da Y ci arriva con probabilità $1/3 \times 1/3 = 1/9$. Quindi a B arriva con probabilità $1/3 + 1/6 + 1/9 = 11/18$.

Adesso vediamo un quesito assegnato ai Kangarou del 2008, nella categoria riservata agli studenti di IV e V superiore.

③ Si scelgano a caso tre punti dalla griglia a lato. Qual è la probabilità che essi siano collineari?



Le scelte possibili sono in numero di $\binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220$.

Quante di queste contengono punti che appartengono alla stessa retta? Possiamo scegliere 3 dei 4 punti di ogni riga, e lo facciamo in $3 \times \binom{4}{3} = 3 \times 4 = 12$ modi; Oppure i punti di una stessa colonna, e lo facciamo in 4 modi; o infine i punti di una stessa diagonale e lo facciamo in 4 modi. Quindi in totale i casi favorevoli sono 20 e la probabilità è $\frac{20}{220} = \frac{1}{11}$.

Concludiamo con un quesito storico. In una delle sue lettere il cavaliere de Mere chiese a Pascal quale dei due eventi fosse più probabile lanciando un dado per 4 volte di fila: a) ottenere almeno un 6 o b) non ottenere alcun 6?
Consideriamo prima il caso b). In ognuno dei 4 lanci ci sono 5 casi favorevoli su 6, quindi la singola probabilità è 5/6, quella in tutti e 4 i casi, che sono ovviamente indipendenti fra loro, sarà perciò $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 48\%$. Il caso a) è ovviamente il complementare del precedente, pertanto è più probabile, dato che ha probabilità $\approx 52\%$ di accadere.

Attività

1. ◎ Da un mazzo di carte da ramino scegliamo una carta a caso; con che probabilità è una figura?
2. ◎ Lanciamo un dado regolare; con che probabilità il punteggio trovato è minore di 4?
3. ◎ In un'urna vi sono 50 biglie rosse e 50 nere. Si scelgono due biglie a caso. Se sono entrambe rosse si mettono nella busta A, se entrambe nere nella busta B, se di colori diversi nella busta C. Dopo avere estratto tutte le biglie, con che probabilità nelle buste A e B ci sono lo stesso numero di biglie?
4. ◎ Mescoliamo le carte di cuori di un mazzo di carte da ramino, quindi giriamo le carte e le mettiamo una dietro l'altra. Con che probabilità esattamente 12 delle 13 carte occupano l'ordine dato dal loro valore?
5. ◎ Anna, Beatrice e Carla partecipano ad una gara di corsa. Con che probabilità la classifica finale rispetterà le iniziali dei loro nomi?
6. ◎ **(C2005)** Ad una festa di classe ogni studente prende a caso un regalo da un sacco. I regali sono libri o calcolatrici. In totale vi sono 27 premi. Meghan è la prima a scegliere e ha una probabilità di prendere un libro di 2/3. Quanti libri ci sono nel sacco?
7. ◎ **(C2005)** Un gioco si dice "onesto" se le possibilità di vincere sono uguali a quelle di perdere. Lanciamo un dado regolare a sei facce, quali dei seguenti eventi rende il gioco onesto?
   a) Vince chi fa 2
   b) Vince chi ottiene un punteggio pari
   c) Vince chi fa meno di 4
   d) Vince chi fa un punteggio divisibile per 3
8. ◎ **(C2009)** Alice lancia un dado regolare, Bob ne lancia un altro. Alice vince se i due punteggi differiscono di 1. Con che probabilità vince Alice?

9. ⓪ **(C2009)** Abbiamo 3 triangoli, 3 quadrati e 2 cerchi. Ne scegliamo uno a caso; con che probabilità è un triangolo?
10. ⓪ **(C2002)** Mark ha messo in un sacchetto delle palline: 3 nere, 6 dorate, 2 viola e 6 rosse. Poi aggiunge alcune palline bianche e dice a Susan che se adesso prende una pallina a caso, la probabilità che essa sia nera o dorata è 3/7. Quante palline bianche ha aggiunto Mark?
11. ① In un sacchetto vi è una biglia di cui sappiamo che è rossa o verde. Immettiamo nel sacchetto una biglia verde, mescoliamo bene ed estraiamo una biglia che risulta verde. Con che probabilità anche l'altra è verde?
12. ① **(C2010)** Nel gioco delle monete, si lanciano tre monete e si vince se esse mostrano tutte la stessa faccia, testa o croce. Qual è la probabilità di vincere giocando una sola partita?
13. ① Gianni non ricorda dove abita il suo amico Carlo. Ricorda solo che, partendo dalla Stazione centrale, deve fare 100 metri in una direzione (N, E, O oppure S) e 100 metri in un'altra. Se allora sceglie due direzioni a caso, con che probabilità raggiunge la casa di Carlo?
14. ① Uno stuzzicadenti lungo 2,5 *cm* è rotto in due pezzi. I due pezzi vengono misurati, arrotondati all'intero più vicino e sommati. Con che probabilità la somma ottenuta è 3?
15. ① In un sacchetto vi è una biglia di cui sappiamo che è rossa o verde. Immettiamo nel sacchetto una biglia verde, mescoliamo bene ed estraiamo una biglia che risulta verde. Rimettiamo la biglia estratta, rimescoliamo e riestrarriamo, ottenendo ancora una biglia verde. Con che probabilità la biglia rimasta è verde?
16. ① Due diversi numeri primi sono scelti a caso fra i primi dieci numeri primi. Con che probabilità la loro somma è 24?
17. ① **(AHSME 1973)** Ci sono due carte: una rossa su entrambi i lati, l'altra rossa su un lato e verde sull'altro. Le due carte sono indistinguibili al tatto. Si sceglie a caso una

delle due carte e si posa sul tavolo. Se la faccia superiore della carta è rossa, qual è la probabilità che anche la faccia inferiore sia rossa?

18. ① **(AHSME 1983)** In un'urna si immettono tre sfere numerate da 1 a 3. Si estraggono tre sfere in successione, rimettendo nell'urna ogni volta la sfera estratta. Se la somma dei numeri sulle sfere estratte è 6, con che probabilità abbiamo estratto sempre la sfera numero 2?
19. ① **(AHSME 1988)** Dall'insieme dei primi 9 numeri naturali scegliamo due numeri a caso, anche uguali fra loro, e li sommiamo, fra le dieci cifre quale è più probabile che costituisca la cifra delle unità di tale somma?
20. ① **(AHSME 1997)** Due dadi a sei facce sono equi, nel senso che ogni faccia ha la stessa probabilità di mostrarsi in un lancio. Però uno dei dadi ha il punteggio 4 sostituito dal 3 e l'altro dado ha il 3 sostituito dal 4. Lanciando i due dadi contemporaneamente, con che probabilità il punteggio ottenuto è un numero dispari?
21. ① **(AHSME 1985)** Da ogni classe formata da ragazzi e ragazze viene prescelto uno studente come rappresentante. Ogni studente ha la stessa probabilità di essere scelto, tenuto conto però del loro numero la probabilità che sia scelto un maschio è i $\frac{2}{3}$ di quella che venga scelta una femmina. Determinare il rapporto fra il numero dei maschi e il numero totale degli studenti.
22. ① Un giocatore di basket deve tirare un tiro libero del tipo 1+1, cioè solo se indovina il primo tira anche il secondo. Se la sua media di realizzazione di tiri liberi è 0,75, con che probabilità segnerà un solo tiro libero in questo caso?
23. ① **(C2003)** Le lettere G, A, U, S, S sono scritte ciascuna su una diversa mattonella. Se Amy sceglie a caso due mattonelle, senza guardarle, con che probabilità sceglie le due con la S?

24. ② **(AHSME 1995)** Se a, b e c sono 3 numeri, anche uguali, scelti a caso dall'insieme {1, 2, 3, 4, 5}, qual è la probabilità che ab + c sia pari?
25. ② **(AHSME 1986)** Dall'insieme dei primi 10 numeri naturali scegliamo sei numeri a caso e li ordiniamo secondo grandezza; con che probabilità il secondo più piccolo è 3?
26. ② **(AHSME 1974)** Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per 6 volte, con quale probabilità otteniamo per almeno cinque volte un punteggio non inferiore a 5?
27. ② **(A1999)** Cosa è più probabile, ottenere almeno un 6 lanciando un dado 4 volte oppure ottenere un doppio sei lanciando due dadi 24 volte?
28. ② **(A2000)** Adam propone a Ben questo gioco. Egli lancia tre monete; se vengono fuori tre facce uguali darà $ 200 a Ben, diversamente Ben darà $ 100 ad Adam. Il gioco è più conveniente per Adam o per Ben?
29. ② **(K2008)** Una pedina posta al centro di una griglia quadrata 5 × 5 viene mossa con passi orizzontali o verticali di ampiezza uno, determinati dal lancio simultaneo di una coppia di dadi, uno rosso e uno blu. Il dado rosso fa muovere la pedina di un passo verso destra se esce un numero pari e verso sinistra se esce un numero dispari, il dado blu fa muovere la pedina di un passo verso l'alto se esce un numero pari e verso il basso se esce un numero dispari. Qual e la probabilità che dopo due lanci di entrambi i dadi la pedina sia tornata al punto di partenza?
30. ② **(AHSME 1976)** Si consideri l'insieme dei punti che, nel piano cartesiano ortogonale, hanno entrambe le coordinate intere che in valore assoluto non superano 4. Se ne scelga uno a caso; qual è la probabilità che esso disti dall'origine non più di due unità?
31. ② **(A2002)** Ci sono 5 segmenti lunghi rispettivamente 2, 4, 6, 8 e 10 cm. Se ne scelgono a caso 3 di essi, con che probabilità con essi si può costruire un triangolo?

32. ② **(A2002)** Peter prende ogni giorno un autobus per andare a scuola. Può scegliere fra uno che passa ogni 15 minuti a partire dalle 6:05 e uno che passa ogni 20 minuti a partire dalle 6:10. Se Peter arriva in un orario compreso tra le 7:00 e le 7:30, è più probabile che aspetti più o meno di 4 minuti il primo autobus disponibile?
33. ③ **(AHSME 1996)** Un'urna contiene sfere di 4 colori: rosso, bianco, azzurro e verde. Quando estraiamo 4 sfere, senza reimmissione, i seguenti casi sono ugualmente probabili:
    (a) 4 sfere rosse;
    (b) 1 sfera bianca e 3 rosse;
    (c) 1 sfera bianca 1 azzurra e 2 rosse;
    (d) 4 sfere di colori diversi.
    Quante sfere ci sono come minimo nell'urna?
34. ③ **(C2000)** Un dado con i punti 1, 2, 3, 4, 6, 8 sulle sue sei facce, viene lanciato. Se esce un numero dispari, allora raddoppiamo tutti i punteggi dispari che erano presenti sulle sue facce. Se invece esce pari, dimezziamo tutti i punteggi pari che erano presenti sulle sue facce in quel momento. Con che probabilità uscirà 2 lanciando il dado la seconda volta?
35. ③ **(C2000)** M è un numero intero che ha la proprietà che se scegliamo a caso un numero x dall'insieme dei primi 1000 numeri interi positivi, la probabilità che x sia un divisore di M è 1/100. Se M $\leq$ 1000, trovare il massimo valore che può assumere.

Statistica

Dato un fenomeno indagato statisticamente, diciamo **frequenza assoluta** di una sua modalità il numero di volte in cui la stessa modalità si è presentata.

Per esempio nella distribuzione {32, 44, 54, 44, 32, 31, 54, 33} la frequenza assoluta di 32 è 2, di 31 è 1, di 40 è 0.

Dato un fenomeno indagato statisticamente diciamo **frequenza relativa** di una sua modalità il rapporto fra la frequenza assoluta della modalità e la cardinalità dell'insieme delle modalità.

Per esempio nella distribuzione {32, 44, 54, 44, 32, 31, 54, 33} la frequenza relativa di 32 è 2/8=25%, di 31 è 1/8=12,5%, di 40 è 0/8=0%.

Diciamo **rango** di una distribuzione numerica l'intervallo di valori compresi tra il minimo e il massimo dei valori della distribuzione.

Per esempio il rango della distribuzione {32, 44, 54, 44, 32, 31, 54, 33} è [31, 54].

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita diciamo **media aritmetica** delle sue modalità il numero ottenuto dal rapporto fra la somma delle modalità e la loro cardinalità totale.

Per esempio la media aritmetica della distribuzione {32, 44, 54, 44, 32, 31, 54, 33} è (32+44+54+44+32+31+54+33)/8 = 324/8 = 40,5.

Un altro indice centrale usato è la **mediana**, che è quel valore, anche non appartenente alla distribuzione, che divide i valori ordinati in modo crescente o decrescente, in due parti ugualmente numerose.

Facciamo un esempio con un numero dispari di termini: la mediana della distribuzione {2, 5, 8, 11, 23} è 8.
Se invece i termini fossero in numero pari, la mediana viene definita come la media aritmetica dei due termini centrali, e perciò la mediana della distribuzione {2, 5, 8, 11, 23, 41} è la media fra 8 e 11, cioè 19/2=9,5.

Invece la **moda** rappresenta il valore che si presenta con maggiore frequenza, se esiste.
Per esempio la moda della distribuzione {1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5} è 4, poiché è l'unico con frequenza 3, mentre gli altri valori si ripetono 1 o 2 volte.
È possibile che vi siano più valori con la stessa massima frequenza, in questo caso la distribuzione si dice **plurimodale**.

Vediamo qualche quesito, cominciando da uno assegnato nel 1999 alla Canadian Mathematics Competition.

⓪ La media di 4 pesate è 60. I primi tre pesi sono 30, 55 e 65, quanto è il quarto peso?

Se la media è 60 vuol dire che le 4 pesate complessivamente pesano $60 \times 4 = 240$, quindi il quarto peso è $240 - (30+55+65) = 240 - 150 = 90$.

① Un insieme di 35 numeri ha per media 22; eliminiamo un numero e la media diviene 20. Quale numero abbiamo tolto?
Apparentemente il problema sembra privo di soluzione, sono poche le informazioni in nostro possesso, almeno così ci pare.
Ragioniamo un attimo. Cosa significa che la media dei 35 numeri è 22? Che la somma di tutti i numeri è $35 \cdot 22 = 770$.

Allora cosa significa che se eliminiamo un numero la media diviene 20? Che adesso abbiamo 34 numeri, ogni numero vale 20, quindi la loro somma è $34 \cdot 20 = 680$. Perciò il numero eliminato è semplicemente $770 - 680 = 90$.

Un altro quesito assegnato alla Canadian Mathematics Competition del 2004.

① I voti di uno studente sono 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10. Quale voto possiamo togliere in modo che i 7 voti rimasti abbiano la stessa moda e lo stesso rango degli 8 voti iniziali, ma abbiano una media aritmetica maggiore?
Dato che non deve cambiare il rango non possiamo eliminare né 6 e né 10. Non possiamo togliere neanche uno degli 8 perché cambierebbe la moda, quindi possiamo eliminare un 7 o un 9. Ovviamente la media sarà maggiore se eliminiamo il voto minore, cioè 7, in questo caso $\frac{6+7+3\times 8+9+10}{7}=8$. La media iniziale era $\frac{6+2\times 7+3\times 8+9+10}{8}=\frac{63}{8}<\frac{64}{8}=8$.

Ancora un quesito dalla stessa gara, ma del 2005

① Nella successione 32, 8, A , B, X, ogni termine, a partire dal terzo, è media dei precedenti due termini. Quanto vale X?
Facilmente si ha che A = (32+8)/2 = 20, quindi B = (8+20)/2 = 14 e perciò X = (20+14)/2 = 17.

Ancora dalla Canadian Mathematics Competition ma del 1998.

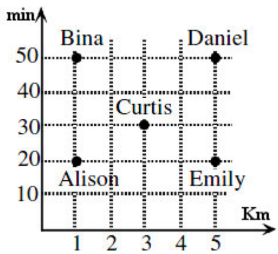
① La media aritmetica di 10 numeri è 0. Se aggiungiamo 72 e –12, la media dei 12 numeri quanto diventa?
Se la media è zero vuol dire che la somma dei 10 numeri è 0, quindi la somma dei 12 numeri diventa 0+72–12=60. Infine, la nuova media è 60/12 = 5.

Vediamo un quesito più impegnativo, tratto dai Kangarou del 2008, nella categoria Junior per studenti di II e III superiore.

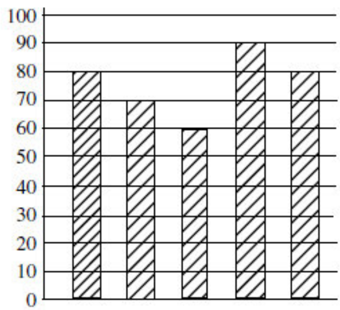
② Nella mia classe i test di matematica sono composti da cinque quesiti. Nel primo test che ho affrontato ho risposto correttamente solo ad uno dei cinque quesiti. Se da ora in poi mi preparo molto bene, in modo da essere in grado di rispondere sempre correttamente ad ogni quesito, quanti test devo affrontare ancora per avere una media di quattro risposte corrette su cinque?
Affronto altri n test, rispondendo correttamente a $5n$ domande, quindi in $5n + 5$ domande ne ho indovinate $1 + 5n$, perciò la mia media è $\frac{1+5n}{5+5n}$ e questa deve fare 4/5. Facilmente si vede che ciò accade se $n = 3$. Devo quindi affrontare altri 3 test.

Attività

1. ◎ **(C2000)** Le età di tre partecipanti alla gara Pascal sono 14 anni e 9 mesi, 15 anni e 1 mese e 14 anni e 8 mesi. Qual è la loro età media?
2. ◎ **(A1998)** Se i possibili voti in un test possono essere solo i numeri interi da 1 a 5, è possibile che il voto medio di una classe di 30 alunni sia 4,15?
3. ◎ **(A2004)** Andrew, Ben e Calvin calcolano che la media delle loro età è di 36 anni. Sapendo che Andrew ha 8 anni più di Ben e che la media delle età di Andrew e Calvin è di 40 anni, quanti anni ha ciascuno?
4. ◎ **(C2000)** I numeri 6, 14, x, 17, 9, y, 10 hanno una media di 13. quanto vale $x + y$?
5. ◎ **(C1999)** Il grafico mostra il tempo che ciascuna di 5 persone impiega a percorrere diverse distanze. In media, chi dei cinque cammina più velocemente?



6. ◎ **(C1998)** Jean esegue 5 compiti, ottenendo i voti, in centesimi, mostrati nel grafico seguente. Qual è il voto medio?



7. ⓪ 5 diversi numeri interi positivi hanno una media aritmetica di 11. Quanto fa la loro somma?
8. ⓪ **(AHSME 1995)** Kim ha ottenuto 87, 83 e 88 nei suoi tre primi compiti di matematica. Se prende 90 nel quarto compito, la media dei suoi voti (A) resta la stessa (B) aumenta di 1 (C) aumenta di 2 (D) aumenta di 3 (E) aumenta di 4
9. ① **(C2001)** Naoki ha svolto 9 compiti, con il voto in centesimi, ottenendo un voto medio di 68. Se eliminiamo il suo voto peggiore, quanto può diventare al massimo la sua media?
10. ① **(C2001)** Dean ha totalizzato 252 punti in 28 partite di basket, Ruth ha giocato 10 partite in meno di Dean e la sua media punti a partita è stata di 0,5 punti più alta di quella di Dean. Quanti punti totali ha fatto Ruth?
11. ① **(C2008)** Rishi ha ottenuto i seguenti voti in 4 test di matematica: 71, 77, 80, 87. Se esegue un altro test, sempre valutato in centesimi, quali dei seguenti valori può essere la possibile media dei 5 test?
    (A) 88 (B) 62 (C) 82 (D) 84 (E) 86
12. ① **(A1998)** Steve ha effettuato 5 test, in cui i voti possono essere solo i numeri interi da 1 a 5. Sappiamo che non ha mai preso 1, mentre ha preso per due volte lo stesso voto e voti diversi nei rimanenti tre test. Se la sua media è 3,4 quale voto ha preso per due volte?
13. ① **(A2005)** In una trasmissione televisiva vengono commentati in diretta i risultati che pervengono da elezioni in cui vi è un solo eletto, quello che ottiene la maggioranza relativa. Ad un certo punto viene detto che in una certa provincia in cui vi erano solo 3 candidati; dopo avere scrutinato il 60% dei voti, uno dei candidati ha ottenuto l'80% di essi, un altro il 15% e il terzo il rimanente 5%. Il commentatore afferma che risulta inutile continuare lo scrutinio perché il primo ha già vinto e l'ultimo ha già perso. Possiamo dire che ha ragione? E se non ce l'ha quale deve

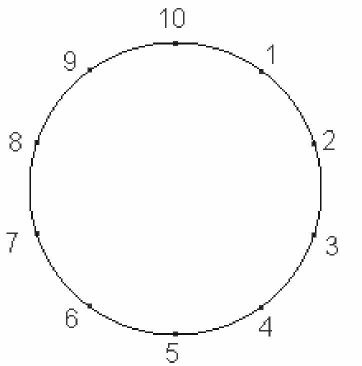
essere la minima percentuale che deve avere ottenuto il candidato più votato per potere dire che ha sicuramente vinto, sempre con lo scrutinio al 60%?

14. ① **(C2007)** La media di 4 diversi numeri interi positivi è 4. Se la differenza fra il più grande e il più piccolo dei numeri è il massimo possibile, qual è la media degli altri due numeri?
15. ① **(AHSME 1983)** In una popolazione il rapporto fra il numero di donne e il numero di uomini è 11 a 10. Se la età media delle donne è 34 e quella degli uomini è 32, determinare l'età media della popolazione.
16. ① **(OMI 1992)** In una classe vi sono tre ragazzi per ogni due ragazze. Se l'età media dei ragazzi è 15 anni e 5 mesi e quella delle ragazze è 14 anni e 7 mesi, qual è l'età media della classe?
17. ① Un gruppo di amici è fatto di maschi e di femmine; la loro età media è 40 anni, quella dei maschi è 50 anni e quella delle femmine è di 35. Trova il rapporto fra il numero di maschi e il numero di femmine.
18. ① **(C2008)** Quattro dei sei numeri 1867, 1993, 2019, 2025, 2109, 2121 hanno media aritmetica 2008. Qual è la media aritmetica degli altri due numeri?
19. ① Il voto in una materia viene dato come media di sei esami, ciascuno dei quali viene valutato un massimo di 100 punti. Se Giovanni ha la media di 88,5 nei primi 4 esami, qual è la minima media che può ottenere negli altri due esami per avere una media complessiva non inferiore a 90?
20. ① La media di sette numeri naturali diversi è 7. Qual è il massimo valore possibile che può assumere uno dei sette numeri?
21. ② **(A1998)** L'età media di una famiglia, formata da madre, padre e alcuni bambini, è 18. Togliendo l'età del padre, cioè 38 anni, la media diventa 14. Quanti bambini ci sono?

22. ② **(A2002)** Un'indagine statistica condotta su un gruppo di tredicenni ha stabilito che essi guardano mediamente la TV per 50 minuti al giorno. In particolare i maschi la guardano in media 45 minuti e le ragazze 65 minuti. Qual è il rapporto del numero dei maschi rispetto alle femmine?
23. ② **(AHSME 1987)** Nella tabella seguente sono riportati i valori esatti, in percentuale, della distribuzione di frequenze di una serie di misure. È stato dimenticato di scrivere il numero totale delle misure effettuate, qual è il suo minimo valore possibile?

Valore misurato	**Frequenza percentuale**
0	12,5
1	0
2	50
3	25
4	12,5

24. ② Sia la media che la mediana di un insieme di cinque distinti numeri naturali è 7, mentre il rango è 6. Quali sono i numeri?
25. ② 25 persone partecipano ad una gara in cui si possono ottenere 0 oppure 1 punto per ogni lancio di una palla. Sappiamo che il primo ha ottenuto x punti, il secondo y punti, il terzo la media di punti dei primi due, il quarto la media dei punti dei primi tre e così via per tutti gli altri che hanno preso la media aritmetica dei punti di quelli che li hanno preceduti. Quanti punti ha fatto l'ultimo?
26. ② **(A1998)** Dieci persone sono sedute attorno a un tavolo. Ognuno pensa a un numero e lo bisbiglia ai suoi due vicini. Poi ognuno annuncia la media dei due numeri. Tali valori sono indicati nel diagramma seguente. Quale numero ha pensato la persona che ha detto 6?



27. ② **(A2002)** Tim ha ottenuto 40 punti nel suo ultimo test di matematica e così ha aumentato la sua media da 27 a 28. Quanti punti avrebbe dovuto prendere per portarla a 30 punti?
28. ② **(C2006)** Cinque studenti svolgono un compito il cui punteggio massimo è 50. Quattro di essi ottengono 42, 43, 46 e 49. Il quinto prende N. La media dei punteggi dei cinque è uguale alla mediana dei punteggi. Che valori può assumere N?
29. ② **(C2002)** Veronica ha effettuato 6 verifiche con punteggi espressi in centesimi. Sappiamo che la media è 74; la moda è 76; la mediana è 76; il voto peggiore è 50; il voto migliore è 94. Inoltre un solo voto è stato ottenuto due volte, gli altri 4 voti sono diversi tra loro. Se tutti i voti sono stati interi, quanti diversi valori può assumere il secondo voto più basso?
30. ③ **(A2002)** Nella sesta, settima, ottava e nona partita di un campionato di basket, un giocatore ha segnato rispettivamente 23, 14, 11 e 20 punti. La sua media punti dopo le prime 9 partite è maggiore di quella dopo le prime 5 partite. Quanti punti dovrebbe fare, come minimo, nella decima partita per aumentare la sua media punti a 18?

Risposte alle Attività proposte

Un po' di storia

1. Ne dobbiamo prendere 4, poiché se siamo sfortunati i primi 3 hanno colori diversi, ma allora il quarto deve essere sicuramente dello stesso colore di uno degli altri.
2. Se ne prendiamo 5 possono essere tutti di gusti diversi, dobbiamo perciò prenderne uno in più, cioè 6, perché sicuramente almeno due siano dello stesso gusto.
3. Stavolta ne dobbiamo prendere almeno 13, perché se siamo sfortunati i primi 11 possono essere verdi o blu; a questo punto i calzini rimasti saranno tutti rossi e perciò siamo sicuri che in 13 calzini 2 sono certamente rossi.
4. Se dobbiamo estrarre almeno 7 palle per avere la sicurezza che almeno una sia rossa, vuol dire che le verdi sono 6. Dato che per avere la sicurezza che due palle abbiamo diversi colori ne dobbiamo estrarre 13, vuol dire che le rosse sono 12.
5. Dato che i colori sono due, il minimo numero di calzini da prendere per avere la certezza che siano dello stesso colore è 3. Dato che questo numero coincide con il minimo numero da prendere per averne due di colore diverso, vuol dire che in totale i calzini sono 4, due bianchi e due neri.
6. Lanciando tre dadi regolari, su ciascun dado esce un punteggio da 1 a 6, quindi il minimo ottenibile è 3, il massimo è 18, gli altri punteggi, da 4 a 17, possono ottenersi tutti, anche se con diversa probabilità. Perciò l'affermazione a) è sicuramente falsa; la f) certamente vera e le altre invece possono essere false o vere.
7. Potrebbero essere ovviamente proprio le 20:08, non potrebbero essere sbagliato il primo 0 perché non esistono le ore 28. E neppure il secondo 0 perché non vengono segnati 80 o 88 minuti. Quindi l'unica altra possibilità sono le 20:00.

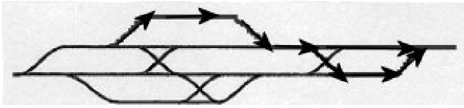
8. Dal momento che l'ordine non conta, abbiamo questi casi: (2, 2), (2, 3), (3, 3), (2, 6), (3, 6), (6, 6), e i punteggi possibili sono allora i seguenti: 4, 5, 6, 8, 9, 12.
9. I numeri possono formati solo da 4, con somma delle cifre pari a $4 \times 4 = 16$; tre 4 e un 5, con somma $3 \times 4 + 5 = 17$; due 4 e due 5, con somma $2 \times 4 + 2 \times 5 = 18$; un 4 e tre 5, con somma $4 + 3 \times 5 = 19$; o da tutti 5, con somma $4 \times 5 = 20$.
10. Possiamo individuare 4 triangoli piccoli e 2 grandi, per un totale di 18 punti. Inoltre 4 quadrati piccoli e uno grande, per un totale di 20 punti. Quindi il massimo punteggio ottenibile è 38.
11. Se Harold ha ricevuto il 60% dei voti, Jacquie ha ricevuto il 40%, quindi la differenza percentuale è il 20%. Ma questo 20% sono 24 volti, quindi il 10% sono 12 voti e il 100% sono 120 voti.
12. È facile capire che dei 24 numeri, i primi 6 iniziano per 1, i successivi 6 per 2, altri 6 per 3 e infine 6 per 4. Quindi i primi 12 numeri iniziano per 1 o per 2. A questo punto il tredicesimo è 3124 e 3142 è il quattordicesimo.
13. Applichiamo il principio del nido del piccione.
    a) le non rosse sono un totale di 45, quindi dobbiamo prendere almeno 46 palle perché una sia sicuramente rossa;
    b) le palle né rosse, né nere sono 40, quindi dobbiamo prenderne almeno 41;
    c) prendendone 75, potrebbero essere tutte rosse, verdi e gialle e nessuna nera; occorre prenderne 76 per avere anche almeno una nera;
    d) prendendo 36 palle, due saranno sicuramente di diverso colore, perché potremmo prendere tutte le rosse, che sono 35, ma la 36ª dovrà essere di un altro colore;
    e) dato che vi sono 4 colori, potremmo prenderne due di ciascun colore, perciò se ne prendiamo 9, tre avranno certamente lo stesso colore.

14. Come ultima cifra possiamo mettere 0, come penultima 1, poi 2, a questo punto dobbiamo mettere almeno 4 per la seconda cifra e la prima cifra deve essere almeno 8. Otteniamo così 94210 e 84210. Se al posto del 4 mettiamo il 5 abbiamo solo 95210. Se sostituiamo il 3 con il 2, non possiamo ottenere quanto richiesto perché $5 + 3 + 1 + 0 = 9$. Lo stesso accadrà se sostituiamo i numeri più piccoli. Quindi solo 3 numeri verificano quanto richiesto.
15. Poiché $7776 = 6^5$, potremmo avere ottenuto 5 volte 6 e 5 volte 1, per una somma di $6 \times 5 + 5 = 35$. Al posto di un 6 e un 1 potrebbero esser usciti un 2 e un 3, e in tal caso il prodotto rimarrebbe identico, ma la somma totale diminuirebbe (2+3=5 al posto di 1+6=7), e quindi 35 è il massimo.
16. Le ore possono andare da 00 a 23 (24 valori diversi). Consideriamo i 3 casi con cifre uguali: 00, 11, 22. Esaminiamo ad esempio 00: potremo avere 00:X0 oppure 00:0X: nel primo caso X può avere 5 scelte (da 1 a 5) e nel secondo 9 scelte (da 1 a 9), per un totale di 5+9=14 casi. Questo per ciascuna delle terne, quindi in tutto 3x14=42 casi. Esaminiamo ora le ore formate da cifre diverse. Da 01 si ottengono 2 soluzioni: 01:00 e 01:11. Analogamente da 02, 03, 04, 05, 10, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 23, quindi altre $2\times13=26$ soluzioni. Da 06 si ricava solo 06:00. Analogamente da 07, 08, 09, 16, 17, 18, 19, quindi altre 8 soluzioni. In totale 42+26+8=76.
17. Le cifre che si vedono allo stesso modo dall'interno come dall'esterno possono essere solo 0 o 8, tutte le altre non sono invarianti per simmetrie rispetto al piano che le contiene. Notiamo che l'1 non rispetta tale regola in quanto dall'interno lo vedo sulla destra, e dall'esterno sulla sinistra. Se le cifre vengono messe nella colonna centrale, si scelgono le caselle in 3 modi, poi le cifre in 2 modi ciascuna. In tutto 3x2x2=12 casi. Se invece non si usa la colonna centrale, occorre scegliere una riga (fra 3), e poi cosa mettere nella casella di destra fra 2, 5, 0, 8; automati-

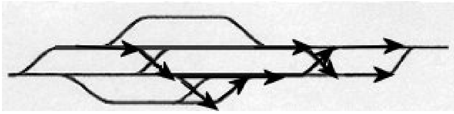
camente nella casella di sinistra andrà un numero nell'ordine fra 5, 2, 0, 8. Quindi 3x4=12 casi. In tutto 12+12=24 combinazioni.

18. Scelgo le prime due cifre in 90 modi diversi (da 10 a 99). A questo punto, se la somma è pari, scelgo la terza cifra dispari in 5 modi, mentre se la somma è dispari, scelgo la terza cifra pari in 5 modi, per un totale di 90x5=450 numeri possibili.
19. Dobbiamo registrare i punteggi 10, 12, 14, 16 e 18. Essi si ottengono rispettivamente in 6 modi (1+3+6, 1+4+5, 2+2+6, 2+3+5, 2+4+4, 3+3+4), 6 modi (1+5+6, 2+4+6, 2+5+5, 3+3+6, 3+4+5, 4+4+4), 4 modi (2+6+6, 3+5+6, 4+5+5, 4+4+6), 2 modi (4+6+6, 5+5+6), 1 modo (6+6+6). Totale 19 modi.
20. Se ciascuna squadra incontra tutte le altre, ci sono 6 incontri. Poiché si è verificato 4 volte, abbiamo avuto un totale di 24 partite. Se nessuna di esse fosse finita in parità i punti totali dovevano essere 24×3=72. La somma di tutti i punteggi è invece 22+19+14+12=67, quindi 5 punti di meno. Significa che ci sono stati 5 pareggi.
21. Solo (4, 5, 7, 8, 9) e (3, 6, 7, 8, 9). Infatti il più grande dei numeri deve essere almeno 9, poiché 4+5+6+7+8=30. Quindi il quinto numero è 9, e gli altri danno una somma di 33 – 9 = 24. Se il quarto numero fosse 7, i rimanenti 3 numeri dovrebbero avere una somma di 24 – 7 = 17, ma 4+5+6=15, quindi il quarto numero deve essere 8. Allo stesso modo vediamo che il terzo numero deve essere 7. A questo punto i primi due devono avere somma di 33 – 24 = 9, e poiché devono essere entrambi minori di 7 può essere solo 3 + 6 o 4 + 5.
22. Consideriamo percorsi che non ritornino indietro. Abbiamo un primo bivio, in cui possono perciò prendersi due diverse strade. Per ognuna di queste due strade ci sono altri due bivi, quindi già siamo a 4 percorsi. Consideriamoli uno alla volta, cominciando da quello più in alto. Questo

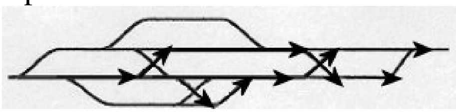
ha un solo bivio a due strade, dato che il secondo bivio non può essere percorso a ritroso. Quindi abbiamo un totale di due percorsi.



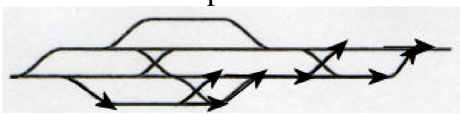
Passiamo alla seconda strada. Un primo bivio conduce a due percorsi che a loro volta portano ad altri tre percorsi, come visto in precedenza. In totale perciò ci sono altri 6 percorsi.



Terza strada. Intanto un primo bivio a due strade, la prima con 2 percorsi; la seconda invece porta a un altro bivio a due strade. Entrambe queste ultime hanno due percorsi. In totale sono 6 percorsi.



Ultima strada. In questo caso c'è un bivio a due strade, che vanno poi a finire nello stesso posto, in cui ci sono due percorsi,. Perciò in totale 4 percorsi.



Quindi complessivamente abbiamo 2 + 6 + 6 + 4 = 18 percorsi.

23. Iniziando dal fondo del diagramma, troviamo F. Poiché $F - 7 = 3$ o $7 - F = 3$, e dato che F è uno fra 1, 2, 4, 5, 6 e 8, vuol dire che $F = 4$. Ragionando allo stesso modo troviamo $E = 5$, $D = 2$, $A = 8$, $B = 1$ e $C = 6$. Quindi $A + C = 14$.
24. Consideriamo la cifra delle centinaia, che ovviamente deve essere come minimo 2. In questo caso l'unica soluzione possibile è 210. Se la cifra delle centinaia è 3, le soluzioni sono: 321, 320, 310. Infine se è uguale a 4, abbiamo 432,

431, 430, 421, 420, 410. In totale 10 numeri sono decrescenti, fra 100 e 500.

25. Se un dado presenta il 2, i punteggi ottenibili sono: 4, 5, 7, 10. Se invece presenta il 3, possiamo avere: 5, 6, 8, 11. Con il 5 avremo: 7, 8, 10, 13. Infine con 8 abbiamo: 10, 11, 13 e 16. Di questi 16 casi solo 9 sono diversi.
26. Il 95% di 20 è 19, quindi Luke ha perso una sola partita. Se vince le successive partite per raggiungere il 96%, vuol dire che 1 partita persa deve rappresentare il 4% del totale, quindi il totale delle partite giocate deve essere 100/4 = 25. Perciò Luke deve giocare e vincere altre 5 partite.
27. Osserviamo che ogni cammino che parte dalla P finisce in una delle due L e forma la parola "PASCAL", quindi basta contare quanti cammini vanno dalla P a una delle due L. E' semplice vedere che ognuna delle 2 C può essere raggiunta in 3 modi, poi la A successiva in 6 modi, e perciò ciascuna delle L in 6 modi, per un totale di 12.
28. Si può iniziare facendo una tabella, con 9 numeri 2 e altrettanti 3: sono i par delle 18 buche. Sotto questi valori, segniamo quanto è stato realmente realizzato, e proviamo a mettere un 3 sotto ciascun 2 e un 2 sotto ciascun 3: il punteggio totale è ancora lo stesso. Ma devo sistemare ancora un 1: lo metto al posto di un 2, e allora al posto di un 3 devo mettere 4, e tutto funziona, quindi Desiderio ha realizzato 8 volte buca in 3 tiri. Analoga soluzione si sarebbe trovata se si fosse messo l'1 al posto di un 3.
29. La media dei primi 2 è $\frac{p_1 + p_2}{2}$ e questa media è 2 Kg più della media precedente, cioè di p_1, quindi si ha: $\frac{p_1 + p_2}{2} = p_1 + 2$, cioè $p_1 + p_2 = 2p_1 + 4 \Rightarrow p_2 = p_1 + 4$. La media dei primi tre è

$$\frac{p_1+p_2+p_3}{3}=\frac{p_1+p_2}{2}+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{p_1+p_1+4+p_3}{3}=\frac{p_1+p_1+4}{2}+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot(2p_1+4+p_3)=3\cdot(2p_1+8)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4p_1+8+2p_3=6p_1+24\Rightarrow p_3=p_1+8$$

Procedendo allo stesso modo abbiamo

$$\frac{p_1+p_2+p_3+p_4}{4}=\frac{p_1+p_2+p_3}{3}+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{p_1+p_1+4+p_1+8+p_4}{4}=\frac{p_1+p_1+4+p_1+8}{3}+2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\cdot(3p_1+12+p_4)=4\cdot(3p_1+18)\Rightarrow p_4=p_1+12$$

Alla fine avremo $p_5=p_1+16$.

Potevamo risolvere anche supponendo che il primo numero fosse stato 0, e quindi la media era 0, e sarebbe dovuta diventare via via 2, 4, 6 e 8, mediante l'aggiunta dei numeri 4, 8, 12 e 16.

30. Le cifre siano *a*, *b*, *c*. La somma è

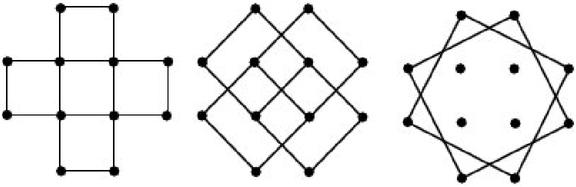
$$a+b+c+ab+ba+ac+ca+bc+cb+$$
$$+abc+acb+bac+bca+cab+cba$$

Usando la notazione posizionale possiamo anche scrivere:

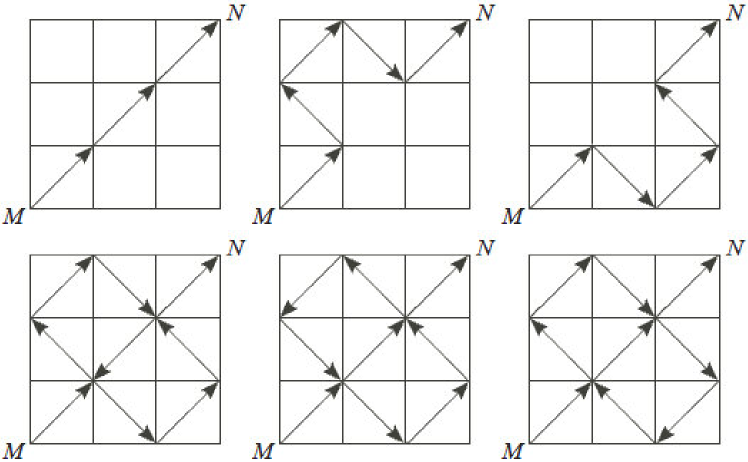
$$a+b+c+10a+b+10b+a+10a+c+10c+a+10b+c+$$
$$10c+b+100a+10b+c+100a+10c+b+100b+10a+c+$$
$$+100b+10c+a+100c+10a+b+100c+10b+a=$$
$$=245\times(a+b+c)$$

Pertanto avremo: $245 \times (a+b+c) = 5635$, cioè $a+b+c = 23$. Non è difficile vedere che l'unica soluzione accettabile, indipendentemente dall'ordine, è 6, 8, 9.

31. Abbiamo diverse possibilità per ottenere quadrati, che mostriamo di seguito, per un totale di 5+4+2=11 casi.



32. Ecco le possibilità;



gli ultimi 3 schemi si devono contare 2 volte ciascuno, perché in ognuno ad un certo punto si può scegliere se deviare a destra o a sinistra.
Totale: 9 percorsi.

33. Lasciando almeno 7 palline vuol dire che al massimo Igor può estrarre 13 palline, ma questo non gli garantisce che le palline rimaste siano 4 di un colore e 3 dell'altro. Infatti potrebbero esserne rimaste 3 di un colore e 2 di ciascuno degli altri colori. Visto che le palline gialle sono 8, potremmo lasciare tutte le palline gialle, quindi anche 12 palline non va bene. Potremmo lasciare le 8 gialle, 2 rosse e 2 nere, quindi N deve essere minore di 8. Perciò il massimo possibile per N è 7.

34. Il 2 è circondato da otto 0, 4 si raggiungono in diagonale, gli altri in orizzontale o verticale. Da quelli che si raggiungono diagonalmente si possono raggiungere due 0

0	0
0	**2**

e da ciascuno di questi, tre 5, come mostrato in figura.

5	5	5
0	**0**	
	2	

Quindi in questo caso vi sono 4 × 2 × 3 = 24 diversi modi di ottenere 2005.
Invece dagli 0 che si raggiungono orizzontalmente o verticalmente possiamo raggiungere 4 diversi altri 0, e precisamente 2 si possono raggiungere in diagonale e 2 no.

0	**0**	0
0	**2**	0

Se è uno dei due che si raggiungono non in diagonale, ci sono cinque possibilità per il 5, come mostrato in figura

5	5	5
5	**0**	**0**
5		**2**

Invece se lo zero si raggiunge in diagonale, le possibililtà per il 5 sono solo 3, come mostrato di seguito

5		**0**
5	**0**	**2**
5		

Perciò vi sono 4×2×5 + 4×2×3 = 40+24 = 64 possibilità. Con i 24 iniziali, otteniamo in totale 88 percorsi.

Raggruppamenti semplici e ripetuti

1. I 13 uomini stringono la mano agli altri 24 invitati, le donne invece stringono la mano solo agli uomini. Quindi basta contare solo le strette di mano degli uomini che sono $\frac{13\times 24}{2}=156$. Abbiamo diviso per due poiché ovviamente se A stringe la mano a B e B la stringe ad A è sempre una sola stretta di mano.
2. Cominciamo a calcolare le possibile coppie distinte, che sono in numero di $\frac{5\times 4}{2}=10$, ciascuna di queste coppie può giocare con altre 3 coppie, quelle cioè che si possono formare con i rimanenti 3 giocatori. Quindi in totale devono effettuarsi $\frac{10\times 3}{2}=15$ partite.
3. Gli unici numeri che verificano le prime due condizioni sono del tipo 6*x*3 o 8*y*4. A questo punto, poiché le cifre devono essere diverse, sia *x* che *y* possono scegliersi fra le 8 cifre rimaste, quindi il totale è 16 numeri.
4. Se il volume è meno di un metro cubo, il lato deve essere meno di un metro, cioè al massimo 99 cm. Analogamente, il lato è lungo almeno 10 cm. Valgono tutti i valori fra 10 e 99 compresi, che sono 90.
5. Se partiamo con AC, possiamo percorrere ACF, oppure ACEF, ACBEF, ACBDEF. Se invece partiamo con AB, avremo: ABEF, ABDEF. Totale 6 percorsi.
6. La casella 2 si può raggiungere in 1 modo, la casella 3 in 2, la 4 in 3, la 5 in 5, la 6 in 8 e la 7 in 13. Questi risultati parziali sono i numeri di Fibonacci, tali cioè che a partire dal terzo, ognuno di essi, vale la somma dei due che lo precedono. Abbiamo i seguenti 13 cammini:

   1–2–3–5–7; 1–2–3–4–5–7; 1–2–3–4–5–6–7;
   1–2–3–4–6–7; 1–2–4–6–7; 1–2–4–5–6–7;
   1–2–3–5–6–7; 1–2–4–5–7; 1–3–5–6–7;

1–3–4–5–6–7; 1–3–4–6–7; 1–3–4–5–7; 1–3–5–7

7. Indichiamo con 1 la lampada accesa e con 0 la lampada spenta. Si tratta allora di scrivere tutte le sequenze di 0 e 1, per un totale di 5, ma con almeno un 1. Poiché tutte le sequenze di 5 cifre scelte fra 0 e 1 sono $2^5 = 32$, e una sola di queste è formata da soli zeri, la risposta è 31.
8. Il numero è 89344*ab*, in cui ciascuna delle cifre strappate può essere scelta fra 10, quindi deve fare 10 × 10 = 100 telefonate.
9. Indichiamo con P il primo e con S il secondo. Le possibili classifiche sono PPS oppure PSS. Dato che in ciascun dei due casi, il concorrente non a pari merito può essere scelto fra i 3 partecipanti, abbiamo un totale di 3 + 3 = 6 possibili classifiche, che sono le seguenti, in cui indichiamo in grassetto i pari merito: **IB**D, **ID**B, **BD**I, I**BD**, B**ID**, D**IB**.
10. Sia *abc* un generico numero di 3 cifre. Perché sia $a \times b \times c = a \times c$, deve essere $b = 1$, oppure $c = 0$. Quindi i numeri sono tutti quelli del tipo *a*1*c* oppure *ab*0. I primi sono in totale 9 × 10, dato che *a* non può essere 0. I secondi sono anch'essi 90. In questo modo però abbiamo contato due volte i numeri *a*10, che sono un totale di 9. Infine i numeri cercati sono un totale di 180 – 9 = 171.
11. Con due cifre abbiamo solo 80. Con 3 cifre abbiamo i numeri del tipo A08, A80 e 80A, che sono un totale di 9 + 9 + 10 = 28, da cui dobbiamo togliere 808 perché lo abbiamo contato sia nel primo che nel terzo caso. Quindi sono proprio 28.
12. Sono i numeri del tipo XYZ, in cui X, Y e Z possono scegliersi fra le cifre da 1 a 9. Essi sono quindi 9 × 9 × 9 = 729.
13. Indichiamo con 1 se sale lo scalino, con 0 se lo salta. Può saltare un solo scalino in 5 modi diversi, a seconda che salti il primo, il secondo, …, il quinto scalino. Oppure può saltare due scalini non consecutivi in 6 modi, 010111, 011011, 011101, 101011, 101101, 110101. O ancora tre

scalini a due a due non consecutivi, in 1 solo modo: 010101. Non ci sono altre possibilità. Totale 12 modi.

14. Intanto vediamo in quanti modi, a parte l'ordine, possiamo scrivere 5 come somma di 3 cifre non nulle.
$$5 + 0 + 0 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$
Poiché abbiamo pochi casi, piuttosto che andare a calcolarli, ci limitiamo a scriverli.
500, 410, 401, 140, 104, 320, 302, 230,
203, 311, 131, 113, 221, 212, 122.
In totale 15.
15. Il numero cercato deve avere 8 cifre, perché con 1, 2 e 3 possiamo costruire i 6 diversi numeri: 12, 21, 13, 31, 23 e 32. Il numero cercato è perciò 32133123.
16. Sono i seguenti 12: 0023, 0032, 0203, 0230, 0302, 0320, 2003, 2030, 2300, 3002, 3020, 3200.
17. Giovanna può fare con tutte e due le frecce lo stesso punteggio, ottenendo quindi il doppio del singolo punteggio, cioè 0, 4, 6 o 12. Oppure può fare due diversi punteggi ottenendo: 2, 3 o 6 se l'altra freccia va fuori bersaglio, oppure 5, 8, 9 se entrambe colpiscono il bersaglio. Di questi 10 punteggi due (il 6) li abbiamo contati due volte, quindi in totale sono 9 diversi punteggi.
18. Indichiamo con P uno studente di prima e con S uno di seconda. Le classifiche possibili sono le seguenti:
PPSPSPSP; PSPSPSPP; SPPSPSPS;
SPSPPSPS; SPSPSPPS
La somma di tutti i punteggi è $1+2+...+8=\frac{8\times 9}{2}=36$, quindi gli studenti di prima e seconda hanno avuto lo stesso punteggio totale, 18. Si vede facilmente che l'unico dei 4 casi che verifica questa proprietà è il quarto. In questo caso Gianni e Gianna occupano quarta e quinta posizione, perciò hanno ottenuto insieme 4 + 5 = 9 punti.
19. Cominciamo ad osservare che la base deve essere formata da un numero di cubi che è un divisore di 24. Se è formata

da un solo cubo, con altezza di 24 cubi, vi è una sola possibilità; con base formata da 2 o da 3 cubi, abbiamo ancora un caso per ciascuno; invece con base 4 cubi le possibilità sono due, perché questa base può essere (1×4) o (2×2); con base 6 cubi altri due casi (base 1×6 o 2×3); con base 8 cubi, 2 casi: 1×8 o 2×4; con base 12, 3 casi: 1×12, 2×6 o 3×4; con base 24 cubi, 4 casi: 1×24, 2×12, 3×8, 4×6. Totale: 16 casi.

20. Contiamo quanti led si illuminano per visualizzare ciascuna cifra. La cifra meno "luminosa" è l'1, che usa solo due led. Quindi l'orario 11:11 è quello meno luminoso, usando un totale di 8 led. La cifra più luminosa è l'8, che usa 7 led, ma possiamo usarla solo come seconda cifra delle ore e dei minuti. Quindi il massimo sarebbe 88:88, ma due degli 8 non sono possibili, quindi cerchiamo fra le altre cifre se ce n'è qualcuna a 6 led, e troviamo 0, 6 e 9. Potendo utilizzare gli 0, otteniamo 08:08, per un totale di 6+7+6+7=26 led accesi.
21. I 120 numeri si dividono in gruppi di 24, in modo che i primi 24 iniziano per 1, poi dal 25° al 48° iniziano per 2, e poi dal 49° al 72° per 3. Quindi il 75° appartiene al quarto gruppo ed è perciò un numero che inizia per 4. Il 73° è 41235, il 74° 41253 ed infine il 75° è 41325.
22. I punteggi ottenibili sono la somma di tre dispari, quindi numeri dispari, e vanno da 1+1+1=3 fino a 5+5+5=15, passando per tutti i numeri dispari. I numeri dispari fino a 15 sono in numero di 7.
23. Si vede abbastanza facilmente che ogni volta che abbiamo scritto 200, ci sono due strade per scegliere il 6. Dato che 200 si scrive in 4 modi, in totale ci sono 8 modi.
24. Conviene considerare il caso complementare, cioè contare quanti numeri hanno tutte le cifre diverse e sottrarli da tutti i numeri di 4 cifre da 1000 a 9999 compresi, che sono 9000. Perché un numero *abcd* abbia tutte le cifre diverse dobbiamo scegliere *a* fra le 9 cifre non nulle, *b* fra una

qualunque delle altre 9 cifre, 0 incluso, *c* fra le rimanenti 8 e *d* fra le rimanenti 7. Quindi un totale di $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ numeri con cifre tutte diverse. Infine il risultato richiesto è $9000 - 4536 = 4464$.

25. Partendo da K vi sono 2 scelte per la A, quindi altre due scelte, per ognuna delle A, per la R, cioè 4 scelte per AR, infine 8 scelte per ARL. Quindi 8 modi di leggere KARL.
26. I numeri sono del tipo 5*abc*, in cui le tre cifre incognite possono scegliersi fra 5 (0, 1, 2, 3, 4), e quindi sono in numero di 5^3. Poi ci sono quelli in cui 5 non è la prima cifra che invece sono in numero di $3 \times (5^3 - 5^2)$, perché dobbiamo eliminare quelli che iniziano per 0. Infine abbiamo un totale di
$$125 + 3 \times (125 - 25) = 125 + 300 = 425.$$
27. Consideriamo il complementare del caso: quanti non hanno neanche una cifra uguale a 7. Fra i numeri di 1 cifra, 0 escluso, ce ne sono ovviamente 8. Fra quelli di 2 cifre ce ne sono $8 \times 9 = 72$. Fra quelli di 3 cifre abbiamo già visto nell'esempio svolto che ce ne sono $8 \times 9 \times 9 = 648$. Cioè abbiamo 8+72+648=728 numeri su 999 che non hanno il 7, quindi 271 che lo hanno. Adesso, i numeri da 1000 a 1999 sono del tipo 1abc, con a, b, c valori fra 0 e 9 con l'esclusione di 7, quindi in tutto sono 9×9×9=729. Quelli che cerchiamo noi sono i rimanenti, cioè 1000-729=271. Abbiamo fatto la nostra ricerca fino al 1999 anziché fino a 1998, ma possiamo allargare il nostro campo d'indagine, a numeri che poi non verranno conteggiati, in quanto privi di cifre 7. In tutto quindi sono: 271+271=542.
28. Indichiamo con il simbolo S4 la scatola da 4 e con S6 l'altra. Se le rosse le mettiamo in S4 vi è un solo modo. Se ne mettiamo 3 in S4 e una in S6, in S4 possiamo mettere una degli altri due colori, vi sono perciò 2 modi. Se mettiamo 2 rosse in S4, le altre due le possiamo scegliere in 3 modi (BB, VV, BV). Se mettiamo una rossa in S4, le altre 3 le possiamo scegliere in 3 modi (BBB, BBV, BVV). Se

in S4 non mettiamo palle rosse, ci sono 2 modi (BBBV, BBVV). In totale perciò vi sono 1 + 2 + 3 + 3 + 2 = 11 modi diversi.

29. Calcoliamo quanti non hanno alcuna cifra che si ripete. Essi sono numeri del tipo *abcd*, in cui ogni simbolo rappresenta una diversa cifra. *a* può scegliersi fra 9, dato che non può essere 0, *b* fra le 9 cifre diverse da *a*, *c* fra le 8 diverse da *a* e *b*, *d* fra le 7 diverse dalle altre tre, per un totale di 9× 9 × 8 ×7 = 4536. Tutti i numeri di 4 cifre sono 9000, quindi quelli cercati sono: 9000 – 4536 = 4464.
30. Se la cifra delle unità è 0, ci sono 9 combinazioni, da 110 a 990; se la cifra delle unità è 2, ci sono 8 casi, da 202 a 972; se la cifra delle unità è 4, ci sono 6 casi, da 404 a 954; se la cifra delle unità è 6, ci sono 4 casi, da 606 a 936; se infine la cifra delle unità è 8, ci sono i due casi 808 e 918. In tutto 9+8+6+4+2=29.
31. Dobbiamo distinguere il caso in cui entrambe le cifre sono diverse da zero, da quello in cui una delle due è zero. Ciò perché ovviamente non ci sono numeri che iniziano per 0. Nel primo caso abbiamo a che fare con numeri del tipo *aabb*, *abab, abba* che sono un totale di 3 × 9 × 8 = 216.
    Nel secondo caso invece sono i numeri del tipo *aa*00, *a*0*a*0*, a*00*a* che sono un totale di 3 ×9 = 27. Quindi in totale sono 216 + 27 = 243.
32. Osserviamo che m+n è pari solo se m e n sono entrambi pari o entrambi dispari. Quindi se m = 1, ci sono le 9 coppie (1, 3), (1, 5), …, (1, 19). Se m = 3, ci sono le 8 coppie (3, 5) (3, 7), …, (3, 19), e così via, diminuendo sempre di 1, fino all'unica coppia (17, 19). Quindi per m dispari ci sono 9 + 8 + 7 + … + 1 = 9 × 10/ 2 = 45 coppie. Con un ragionamento simile, si trovano altrettante coppie se m è pari, quindi in totale sono 90 coppie.
33. Ricordiamo che un numero è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre lo è. Dato che la somma delle cifre già presenti è 10 e che le altre due cifre possono dare una somma

massima di 18, possiamo inserire cifre la cui somma sia 2, 5, 8, 11, 14, 17, con le seguenti rispettive scelte: (0,2), (1, 1), (2, 0); (0, 5), (1, 4), …, (5, 0); (0, 8), (1,7), …, (7,1), (8,0); (2, 9), (3, 8), …, (9, 2); (5, 9), …, (9, 5); (8, 9), (9, 8). Totale 3+6+9+8+5+2 = 33 scelte.

34. Indichiamo i colori con le lettere A, B, C. Possiamo ottenere solo le due seguenti colorazioni.

A	B	C		A	B	C
B	C	A		C	A	B
C	A	B		B	C	A

Ovviamente ciascuna lettera può rappresentare uno dei tre diversi colori, quindi in totale abbiamo 3! + 3! = 12 modi.

35. Si tratta di considerare piuttosto che permutazioni di 5 oggetti, permutazioni di 3 oggetti: X (che indica AB o BA), Y (che indica DE o ED) e C. Questi sono un totale di 4 × 3! = 24. Di questi però dobbiamo eliminare quelli in cui C è accanto a B. Questi sono tante quante le permutazioni degli oggetti Z (che indica ABC o CBA) e Y. Cioè sono 4 × 2! = 8. Quindi in totale abbiamo 24 – 8 = 16 possibilità che sono le seguenti:
ABCDE, ABEDC, BACDE, BAEDC, CABDE, CABED, CBADE, CBAED, CDEAB, CDEBA, DEABC, DEBAC, EDABC, EDBAC, EDCAB, DECBA.

36. Possiamo avere solo cifre 1 e 2. Con tre 1 e un 2, ci sono 4 numeri. Con due 1 e due 2 ce ne sono $\binom{4}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$.
Analogamente con tre 2 e un 1, ci sono 4 numeri.
Possiamo avere altre cifre, oltre 1 e 2. Se è una sola la cifra diversa, avremo due cifre 1 e una 2 o viceversa. Quindi le permutazioni di 112X e 122X, con X che può assumere 8 diversi valori, ma non 0 se lo mettiamo come prima cifra. Sono perciò

$$2\times\frac{4!}{2!}\times 8 - 2\times 3 = 192 - 6 = 186$$

Se poi abbiamo due cifre diverse da 1 e 2, queste possono essere uguali o diverse. Ammettiamo che siano uguali, il numero perciò è del tipo 12XX e le sue permutazioni sono in numero di 12, nei 7 casi nei quali X è diverso da 0 (cioè per X da 3 a 9), mentre sono in numero di 6 nel caso X=0, per un totale di 12×7+1×6=90. Ammettiamo ora che le due cifre diverse da 1 e 2 siano diverse, e per il momento diverse da 0: una volta scelte in 7×6/2=21 modi le due cifre X e Y, ci sono poi 24 permutazioni di questo numero, per un totale di 21×24=504 permutazioni. Ammettiamo ora che una delle due cifre X e Y sia 0. In questo caso il numero diventa 120X, che ha 18 permutazioni non inizianti per 0, mentre X può esser scelto fra 7 cifre, per un totale di 7×18=126 casi. In totale perciò abbiamo: 14+186+90+504+126=920 casi.

37. Indichiamo con una successione di 0 e 1 i 32 denti, in un certo ordine, dove 0 indica che il dente non c'è e 1 che c'è. Dobbiamo quindi contare quante di queste diverse sequenze possiamo fare. Esse sono ovviamente le disposizioni con ripetizione di 2 oggetti di classe 32. Ci possono essere perciò al massimo 2^{32} = 4.294.967.296 abitanti.
38. Detto *n* il numero iniziale di giocatori, dato che ognuno incontra tutti gli altri, le partite sono in totale $\binom{n}{2}$. Con 4 giocatori in meno le partite sono perciò $\binom{n-4}{2}$. Deve allora aversi

$$\binom{n}{2}-\binom{n-4}{2}=50 \Rightarrow \frac{n\times(n-1)}{2}-\frac{(n-4)\times(n-5)}{2}=50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2-n-n^2+9n-20-100=0 \Rightarrow 8n=120 \Rightarrow n=15$$

In effetti $\binom{15}{2}-\binom{11}{2}=\frac{15\times14}{2}-\frac{11\times10}{2}=105-55=50$.

39. Si tratta di scegliere una volta 4 numeri fra 9 e un'altra 5 tra 9. In ogni caso ovviamente l'ordine di scelta non conta. Dato che $\binom{9}{4} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 630 = \binom{9}{5}$, entrambe le macchine possono essere usate lo stesso numero di giorni. In effetti, scegliere i 4 numeri da marcare, equivale a scegliere i 5 numeri da non marcare, o viceversa.
40. La somma di 4 cifre fa 4 in 5 modi:
 4+0+0+0 = 1+3+0+0 = 2+2+0+0 = 1+1+2+0 = 1+1+1+1.
 Numeri del primo tipo c'è solo 4000, del secondo tipo ce ne sono tanti quante le permutazioni di 1300, escludendo quelli che iniziano per 0, cioè $\frac{4!}{2!} - 3! = 12 - 6 = 6$; del terzo tipo ce ne sono $\frac{4!}{2!2!} - 3 = 6 - 3 = 3$; poi ci sono $\frac{4!}{2!} - 3 = 12 - 3 = 9$ del quarto tipo e infine 1 numero del quinto. In totale sono 20.
41. Scomponiamo 24 in fattori primi: $24 = 2^3 \times 3$. In quanti diversi modi possiamo scrivere 24 come prodotto di 3 numeri di una cifra? Abbiamo
 $$24 = 1 \times 3 \times 8 = 1 \times 4 \times 6 = 2 \times 2 \times 6 = 2 \times 3 \times 4$$
 Ovviamente possiamo permutare le cifre, ottenendo il numero totale cercato: 3! + 3! + 3!/2! + 3! = 6+6+3 + 6 = 21.
42. Scriviamo i numeri sfruttando la forma posizionale
 x =100 A + 10 B + C, y = 100 C + 10 B + A, così avremo
 $$x - y = 99A - 99\,C$$
 cioè 99A – 99 C = 495, cioè A – C = 5. I valori possibili per A e C sono (9, 4), (8, 3), (7, 2), (6, 1). B può essere qualsiasi cifra, quindi ha 10 possibilità. In totale perciò ci sono 4 ×10 = 40 diverse possibilità per x.
43. Basta calcolare tutte le permutazioni delle "parole" 6000, 5100, 4200, 3300, 4110, 3210, 2220, 3111, 2211. Abbiamo

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!\times 2!}+\frac{4!}{2!}+4!+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!\times 2!}=$$
$$=4+12+12+6+12+24+4+4+6=84$$

44. Indichiamo con 0 l'interruttore spento e con 1 quello acceso. Tutti i casi sono le disposizioni con ripetizione di 2 oggetti ognuno dei quali si può ripetere da 0 a 4 volte, cioè $2^4 = 16$. ossia i seguenti:

    0000 0001 0010 0011 0100 0101 0110 0111
    1000 1001 1010 1011 1100 1101 1110 1111

    Eliminiamo i casi in cui ve ne sono due adiacenti spenti, ottenendo i seguenti 8:

    0101 0110 0111 1010 1011 1101 1110 1111

45. Possiamo esprimere 5 nei seguenti modi:

    5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 1 + 2

    Ad esempio, di numeri di 4 cifre formati da 1, 4, 0 e 0 ce ne sono

    $$\frac{4!}{2!}-3!=6$$

    cioè le permutazioni della "parola" 1004, diminuite di quelle che iniziano per 0, che non possono essere numeri di 4 cifre. Ragionando in questo modo per gli altri casi, avremo un totale di

    $$1+\left(\frac{4!}{2!}-3!\right)+\left(\frac{4!}{2!}-3!\right)+\left(\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}\right)+\left(\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}\right)+\frac{4!}{3!}=$$
    $$=1+6+6+9+9+4=35$$

46. Perché tre punti siano vertici di un triangolo non devono essere allineati. Calcoliamo intanto tutte le terne che si ottengono scegliendo 3 punti dai 9, che sono $\binom{9}{3}=\frac{9\times 8\times 7}{3\times 2}=84$. Adesso togliamo tutte le terne allineate, che sono quante le righe, le colonne e le diagonali, cioè 8. In totale perciò abbiamo 84 – 8 = 76 triangoli.

47. Indichiamo con le lettere M e F maschi e femmine rispettivamente. Allora le squadre saranno formate da MFFF e

da MMFF. Chiaramente una volta che stabiliamo in quanti modi possiamo formare la prima squadra, la seconda squadra si ottiene con i rimanenti. Ora il maschio si sceglie fra 3, mentre le femmine si scelgono tra 5. Chiaramente l'ordine di scelta non conta, sono perciò combinazioni semplici, quindi in totale abbiamo $\binom{3}{1}\times\binom{5}{3}=3\times\frac{5\times\cancel{4}^{2}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{2}}=30$ squadre.

48. Il quesito equivale a scrivere il numero 6 come somma di 4 addendi non negativi, in cui però l'ordine degli addendi è importante, perché dire che il primo bambino riceve 6 mele, non è lo stesso che dire che le riceve il secondo. Noi abbiamo, per il momento senza considerare l'ordine:

$$\begin{aligned}&6+0+0+0=5+1+0+0=4+2+0+0=\\&=4+1+1+0=3+3+0+0=3+2+1+0=\\&=3+1+1+1=2+2+2+0=2+2+1+1\end{aligned}$$

Adesso contiamo in quanti diversi modi, per l'ordine, si possono presentare le diverse possibilità:

$$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!\times2!}+4!+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!\times2!}=$$
$$=4+12+12+12+6+24+4+4+6=84$$

dato che abbiamo a che fare con permutazioni con ripetizione degli addendi.

In effetti potevamo ottenere più facilmente lo stesso risultato considerando il numero delle combinazioni con ripetizione di 4 elementi, ciascuno dei quali può ripetersi fino a 6 volte, cioè

$$\binom{6+4-1}{6}=\binom{9}{6}=\binom{9}{3}=\frac{9\times8\times7}{3!}=84$$

49. Se usiamo solo 1 o solo 2, ovviamente vi è solo un modo per volta, cioè in totale 2. Se usiamo entrambi i numeri dobbiamo usare un numero pari di 1. Così se abbiamo due 1 e tre 2, il problema equivale a scrivere le permutazioni

della "parola" 11222, che sono i numero di $\frac{5!}{2!\times 3!}=20$. Così proseguendo allora avremo le "permutazioni" di 111122, che sono $\frac{6!}{4!\times 2!}=15$, e di 1111112, che sono $\frac{7!}{6!}=7$. Quindi il totale è 2 + 20 + 15 + 7 = 44.

50. I maschi possono scegliersi in $\binom{15}{4}=\frac{15\times 14\times 13\times 12}{4\times 3\times 2}=1365$ modi, le femmine in $\binom{12}{4}=\frac{12\times 11\times 10\times 9}{4\times 3\times 2}=495$ modi. All'interno di queste quaterne possiamo accoppiare i ballerini in 4! = 24 modi. Quindi abbiamo un totale di 1365 × 495 × 24 = 16216200 modi.

51. Almeno due coppie vuol dire 2 o 3 coppie. Se sono 3 coppie, il problema equivale a scegliere 3 persone dello stesso sesso fra le 5 disponibili, perché così facendo abbiamo scelto anche i rispettivi compagni. Questo può farsi in $\binom{5}{3}=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2}=10$ modi. Se invece ci sono esattamente due coppie, abbiamo $\binom{5}{2}=10$ modi di scegliere le due coppie, mentre i rimanenti due li dobbiamo scegliere fra le 6 persone rimanenti in modo che non siano in coppia. Abbiamo perciò 6 scelte per la quinta persona e 4 per la sesta perché non deve essere in coppia con la quinta, e dobbiamo poi dividere per 2, poiché scambiando la sesta con la quinta si otterrebbe la stessa formazione. In tutto 10×6×4/2=120. Sommando anche i 10 casi precedenti, otteniamo 130.

52. Gli unici numeri che può scrivere insieme con i propri quadrati sono -1, 0 e 1. Quindi ha potuto scrivere tutti i numeri uguali e può farlo in 2 modi diversi (00000, 11111). Oppure ha scritto solo 0 e 1, con ciascuna cifra che può ripetersi da 1 a 4 volte, perciò sono altri 4 casi (01111, 00111, 00011, 00001). Non può scrivere solo 0 e -1, perché quest'ultimo numero non avrebbe scritto il proprio quadrato. O, infine, usa tutti e tre i numeri e sono altri 6 casi.

    000-11, 00-111, 00-1-11, 0-1111, 0-1-111, 0-1-1-11

    In totale perciò 2 + 4 + 6 = 12 modi.
53. I piazzamenti senza alcun pari merito sono tanti quante le permutazioni di 5 oggetti, cioè 5!. Quelli in cui c'è un pari merito sono invece dati dalla scelta dei due cavalli pari merito, che si fa in $\binom{5}{2}=\frac{5\times 4}{2}=10$ modi, moltiplicati per le permutazioni degli altri 3 cavalli, cioè 3!; il tutto moltiplicato per i modi di prendere i pari merito (primi, secondi, .., quarti), che sono 4. Quindi in totale 4×6×10 = 240 modi. Non è difficile capire allora che gli altri casi, cioè 3, 4 e 5 pari merito danno il totale seguente:
$$5!+4\times\binom{5}{2}\times 3!+3\times\binom{5}{3}\times 2!+2\times\binom{5}{4}+1=431$$
54. Sono lo stesso numero degli anagrammi della parola A-TEMATICA, che sono in numero di $\frac{9!}{3!\times 2!}=30240$.
55. Intanto dobbiamo trovare tutte le soluzioni intere non negative dell'equazione $x + 2y = 10$. Esse sono (0, 5); (2, 4); (4, 3); (6, 2); (8, 1); (10, 0). Adesso vediamo i diversi modi che fornisce ciascuna soluzione.

(0, 5) in un solo modo; (2, 4) in $\frac{6!}{2!4!}=15$ modi; (4, 3) in $\frac{7!}{4!3!}=35$ modi; (6, 2) in $\frac{8!}{6!2!}=28$ modi; (8, 1) in $\frac{9!}{8!1!}=9$ modi; (10, 0) in 1 modo.

Quindi in totale 1 + 15 + 35 + 28 + 9 + 1 = 89.

56. Il totale dei partecipanti alla gara è soluzione dell'equazione:

$$\binom{n}{2}=231 \Rightarrow \frac{n\times(n-1)}{2}=231 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n\times(n-1)=462 \Rightarrow n\times(n-1)=22\times 21 \Rightarrow n=22$$

Le due associazioni hanno x e (22 – x) membri. Deve aversi.

$$\binom{x}{2}+\binom{22-x}{2}=119 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x\times(x-1)+(22-x)\times(21-x)}{2}=119 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-x+462-43x+x^2=238 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2-44x+224=0 \Rightarrow x^2-22x+112=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=11\pm\sqrt{121-112}=11\pm 3 \Rightarrow x=8 \vee x=14$$

Quindi i gruppi sono formati da 8 e 14 persone.

57. Consideriamo tutte le permutazioni dei 12 simboli, che sono 12!, e da queste eliminiamo quelle che hanno C o C# all'inizio o alla fine, che sono 4 × 10 × 10!. Infatti la prima o l'ultima si scelgono fra C e C# e ciò si fa in 4 modi. Ora l'altra nota deve occupare una qualsiasi altra posizione tranne la prima o l'ultima, e lo fa in 10 modi, infine le rimanenti 10 note possono permutare fra le 10 posizioni rimaste. Dobbiamo ora escludere il caso in cui entrambe le note C e C# sono agli estremi, così si può scegliere in due

modi la nota che occuperà il primo posto, e poi in 10! modi sistemiamo le note al centro, quindi questi casi sono 2×10!. Ora dobbiamo eliminare anche i casi in cui le due note sono adiacenti (ma non nelle posizioni estreme). Abbiamo 9 possibilità di scegliere la posizione per la prima nota, dalla seconda alla decima posizione, e l'altra andrà automaticamente dalla terza all'undicesima posizione. Le note sono 2, quindi ci sono 18 casi per sistemare C e C#, e per ognuna di queste scelte, le rimanenti note possono scegliersi in 10! modi diversi, per un totale di 18×10!. Alla fine abbiamo perciò:

$$12! - (4\times10\times10!) - (2\times10!) - (18\times10!) =$$
$$10! \times (11\times12 - 4\times10 - 2 - 18) = 261.273.600$$

58. Possiamo prendere la palla rossa al primo tentativo e ciò avviene ovviamente in un solo modo. Alla seconda estrazione invece ci sono 5 modi, a seconda del colore estratto per primo. Alla terza estrazione i modi diventano $\binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2} = 10$, a seconda dei due colori che estraiamo per primi. Non è difficile capire perciò che avremo $\binom{5}{3} = 10$ modi se la prendiamo per quinta, $\binom{5}{4} = 5$ se la estraiamo per quarta e 1 modo per quinta. Perciò in totale abbiamo:

$$\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5} = 2^5 = 32$$

59. Abbiamo

$$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120.$$

Da adesso in poi l'ultima cifra è uno zero. Poi si ha

$$6! = 720,\ 7! = 5040,\ 8! = 40320,\ 9! = 362880$$

e a partire da 10! le ultime due cifre sono due zeri. Quindi per ottenere le ultime due cifre basta sommare le ultime due cifre dei primi 9 addendi.

1 + 2 + 6 + 24 + 20 + 20 + 40 + 20 + 80 = 2**13**.

60. Se i libri li mettiamo su un solo scaffale abbiamo $3 \times 8!$ diverse sistemazioni. Oppure possiamo mettere un libro su uno scaffale e 7 su un altro, il che si fa in $3! \times 7!$ modi, poiché 3! sono i modi di scegliere i scaffali in cui mettere un libro o 7, dato che ciò equivale a considerare le terne di 3 numeri formate da 0, 1, 7. Così procedendo possiamo trovare le altre possibilità in cui i libri li mettiamo su due scaffali, che sono:

$$3! \times (2!6! + 3!5! + 4!4!)$$

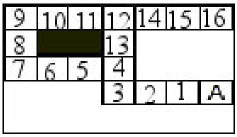
Infine i modi di sistemare i libri su tutti e tre gli scaffali:

$$2! \times (1!1!6! + 2!2!4! + 2!3!3!) + 3! \times (1!2!5! + 1!3!4!)$$

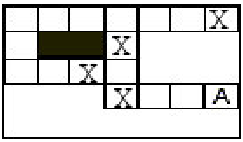
Totale: 171696.

Successioni numeriche

1. Non è difficile capire che l'ultimo numero di ogni riga si ottiene aggiungendo al numero della riga l'ultimo numero della riga precedente. Per esempio l'ultimo numero della quinta riga è 5 + 10 = 15. Quindi l'ultimo numero della decima cifra è 10 più l'ultimo numero della nona, che è 9 più quello dell'ottava e così via. Cioè il numero cercato è 1 + 2 + 3 + … + 10 = 45.
2. Associamo a coppie: (50 – 49) + (48 – 47) + … +(2 – 1) = = 1 + 1 + … + 1, cioè 25 volte 1. Quindi la somma richiesta è 25.
3. Facilmente si vede che il numero si ottiene aggiungendo uno al precedente, quindi dato che partiamo da 5, il cinquantesimo numero sarà 54. L'esponente è invece uno in meno della posizione dell'elemento, cioè x^{49}. Infine il cinquantesimo termine è 54 x^{49}.
4. Numeriamo le celle.



Vediamo quali sequenze possono essere effettuate:
1–2–3–4–5–6–7–8–9–10–11–12–14–15–16;
1–2–3–4–5–6–7–8–9–10–11–12–13–4–5;
1–2–3–4–5–6–7–8–9–10–11–12–13–4–3;
1–2–3–4–13–12–11–10–9–8–7–6–5–4–13;
1–2–3–4–13–12–11–10–9–8–7–6–5–4–3 (che porta ad una posizione già nota).
Quindi ecco segnate le sole posizioni raggiungibili dopo 15 passi.



5. Le lettere che si ripetono sono ABCB, quindi ogni 4 lettere avviene la ripetizione. Poiché $2002 = 500 \times 4 + 2$, vuol dire che per 500 volte ripetiamo il blocco, poi riprendiamo con AB, quindi le ultime tre lettere sono BAB.
6. Togliendo 3 otteniamo la sequenza 8, 15, 22, 29, 36, … formata da numeri che si ottengono aggiungendo 1 a un multiplo di 7, infatti li possiamo scrivere 1+7, 1+14, 1+21, 1+28, 1+35, … Il multiplo di 7 più vicino ai numeri proposti è 224, quindi dei cinque numeri solo 225=1+224, va bene.
7. Osserviamo che i numeri della prima colonna hanno come cifra delle unità 1 o 6, quelli della seconda 2 o 7, quindi 3 o 8, 4 o 9, 5 o 0. L'unica fra le proposte che soddisfa questi requisiti è la C, dato che la B non è possibile poiché nella riga superiore i numeri sono più piccoli di quella inferiore.
8. Continuiamo la successione: 2, 3, 1, –2, –3, –1, 2, 3, … Abbiamo ottenuto di nuovo i primi due numeri, e questo ci autorizza a dire che la successione è formata da 6 numeri che si ripetono all'infinito. Poiché la somma di questi 6 numeri è 0, e 1998 è un multiplo di 6, anche la somma dei primi 1998 elementi è 0.
9. Continuiamo la sequenza: 58, 89, 145, 42, 20, 4, **16**, … avendo ritrovato un numero già scritto la sequenza si ripeterà all'infinito. Abbiamo perciò 6 numeri, quelli da 128 a 40, che non si ripetono, e poi un periodo di 8 numeri (da 16 a 4). Allora sottraiamo 6 a 100, ottenendo 94 che dividiamo per 8 ottenendo un resto di 4. Perciò il 100° numero è uguale al 4° numero del periodo, cioè a 89.
10. L'unico caso impossibile è D. Dato che il 5 precede il 2 vuol dire che la 5 è stata messa sopra la 2, ma allora la segretaria in quale momento sta ricopiando la 3 o la 4, quindi una delle due dovrebbe ancora essere sopra la 2. Gli altri casi invece sono possibili. Nel caso A la segretaria ha ricopiato man mano che il capo ha messo le lettere. Nel

caso B invece ha copiato per prima la 2, e la 1 è rimasta sotto. Mentre ricopiava la 2 sono state messe la 3 e la 4. Ha ricopiato la 4 e la 3, il capo ha messo la 5. Nel caso C, ha cominciato a copiare quando c'erano già 3 lettere, mentre copiava la 2 è stata messa la 4. Quando ha finito di copiare è stata messa l'ultima lettera. Infine nel caso E ha trovato già tutte e 5 le lettere pronte da ricopiare.

11. Partiamo dal fatto che le cifre 2 e 5 non sono presenti nel numero pensato. Ciò significa che le due cifre giuste del primo numero, anche se in posizione sbagliata, sono 4 e 1; e quelle del secondo numero sono 3 e 6. Abbiamo trovato le cifre, dobbiamo trovare l'ordine corretto in cui sono scritte. Se pensiamo che la cifra nella giusta posizione del primo tentativo è 4, il numero sarà 4163. Se è invece l'1, il numero sarà 6314. Quindi il numero non è ancora determinato.

12. Indichiamo il secondo numero con la lettera a, il terzo sarà perciò 21 – 7 – a = 14 – a.

7	a	14 – a						6

Il quarto numero sarà ovviamente di nuovo 7, dato che la somma deve fare 21. perciò avremo

7	a	14 – a	7	a	14 – a	7	a	6

Ciò significa che deve essere 14 – a = 6, cioè a = 8.

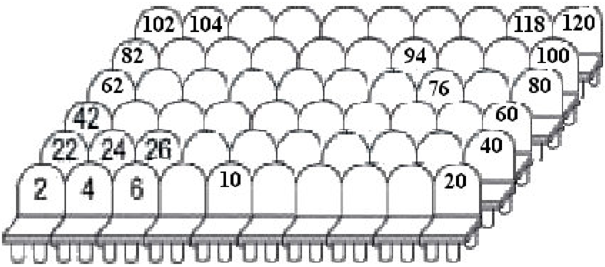
7	8	6	7	8	6	7	8	6

13. A parte il primo 3, poi si ripetono sempre le cifre 27, che è il periodo del numero. Quindi il 123° numero avrà un 3, sessantuno 2 e sessantuno 7, perciò la somma delle sue cifre è $3 + (2 + 7) \times 61 = 552$. In generale la somma delle cifre di un numero di posto dispari è $3 + 9n$. Ma $3 + 9n = 2006$, non ha soluzione intera perché il primo membro è un multiplo di 3, mentre il secondo no. La somma delle cifre di posto pari è invece $3 + 9n + 2 = 5 + 9n$. Deve perciò aversi $5 + 9n = 2006$, cioè $9n = 2001$, che è ancora impossibile perché il primo membro è multiplo di 9 e il secondo no.

14. La somma delle cifre di un numero di 3 cifre va da un minimo di 1 (100) a un massimo di 27 (999). La somma delle cifre di numeri del genere vale al massimo 10 e si ottiene quando la somma delle tre cifre è 19, che accade per 199 o per 379 o per parecchi altri numeri del genere.
15. Perché il primo saggio sia sicuro di quel che dice, vuol dire che le carte rimaste sono o tutte e quattro pari (ma 4 carte pari non ci sono), o tutte e quattro dispari. Quindi il primo saggio ha pescato le carte pari, la cui somma è 2 + 4 + 6 = 12.
16. Costruiamo una tabella a partire da due numeri generici, a e b, con a<b

a	b
a+b	b-a
2a	2b
2a+2b	2b-2a
4a	4b

In pratica ogni riga dispari è il doppio della riga dispari precedente. Perciò l'undicesima riga conterrà valori ottenuti moltiplicando i corrispondenti valori della prima riga per $2^5 = 32$. Perciò gli elementi della prima riga sono 64/32 = 2 e 96/32 = 3.
17. Escludiamo subito il posto 99, perché si trova nella fila a sinistra. Riportiamo in figura gli altri posti e vediamo che il più vicino è il 118.



18. Indichiamo i termini della progressione con a, ar, ar^2, ar^3, … con r la ragione. Noi sappiamo che si ha, per esempio, $a = ar + ar^2$, cioè

$$1 = r + r^2$$

le soluzioni di questa equazione sono $r = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, l'unica positiva, e quindi la soluzione, è $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

19. Se il poligono ha n lati i suoi angoli interni misurano 160°, 155°, 150°, …, $[160 - 5 \times (n - 1)]°$. Questa somma, in gradi. è

$$n \times \frac{[160-5\times(n-1)]+160}{2} = \frac{320-5n+5}{2}\times n = \frac{325-5n}{2}\times n$$

Ma la somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è $(n - 2) \times 180°$. Quindi deve essere

$$\frac{325-5n}{2}\times n = 180n - 360 \Rightarrow 325n - 5n^2 = 360n - 720 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5n^2 + 35n - 720 = 0 \Rightarrow n^2 + 7n - 144 = 0 \Rightarrow n = 9$$

abbiamo considerato solo la soluzione positiva.

20. La prima somma è

$$\frac{8+\left[8+4\times(n-1)\right]}{2}\times n = \frac{12+4n}{2}\times n = 2\times(n+3)\times n$$

la seconda somma è

$$\frac{17+\left[17+2\times(n-1)\right]}{2}\times n = \frac{32+2n}{2}\times n = (16+n)\times n\ .$$

Deve perciò aversi $2n + 6 = 16 + n \Rightarrow n = 10$

21. Abbiamo a che fare con una progressione aritmetica di ragione 1, la somma dei cui termini è 5307. Noi sappiamo che la somma si può anche esprimere come

$$5037 = \frac{a_1 + a_{2010}}{2}\times 2010 = (a_1 + a_{2010})\times 1005$$

I termini di posto dispari rappresentano invece una progressione aritmetica di ragione 2, formata da 1005 termini, la cui somma è $S = \frac{a_1 + a_{2009}}{2} \times 1005$. Ma noi sappiamo che $a_{2010} = a_{2009} + 1$, quindi

$$S = \frac{a_1 + a_{2009}}{2} \times 1005 = \frac{a_1 + a_{2010} - 1}{2} \times 1005 =$$

$$= \frac{(a_1 + a_{2010}) \times 1005 - 1005}{2} = \frac{5307 - 1005}{2} = \frac{4302}{2} = 2151$$

.

Si può osservare che, essendo i termini in numero pari, ci sono 1005 coppie di numeri nei quali il secondo termine vale 1 più del secondo. In tutti la somma dei termini di posto pari vale 1005 più della somma dei termini di posto dispari. Quelli di posto dispari danno per somma (5307-1005):2 $= 2151$.

22. Indichiamo con n il primo, che è dispari. Allora il successivo sarà $n + 3$ e sarà ovviamene pari, quindi il terzo elemento sarà $\frac{n+3}{2}$. Questo elemento potrà essere sia pari che dispari. Se è pari, il quarto elemento sarà $\frac{n+3}{4}$ e perciò il primo è $\frac{n+3}{4} = 27 \Rightarrow n = 105$. Se invece è dispari, il quarto sarà $\frac{n+3}{2} + 3$ e il primo si ricava dall'equazione $\frac{n+3}{2} + 3 = 27 \Rightarrow n = 45$. Facciamo vedere che in effetti entrambi i numeri ci portano ad avere il primo numero pari a 27.

$$105 \xrightarrow{+3} 108 \xrightarrow{/2} 54 \xrightarrow{/2} 27;$$

$$45 \xrightarrow{+3} 48 \xrightarrow{/2} 24 \xrightarrow{+3} 27$$

23. Il numero di serie lo indichiamo con **a2bcdefghijk4m**. Sappiamo che a + 2 + b = 13 e 2 + b + c = 13, cioè a + b = b + c = 11, cioè a e c sono uguali. Ragionando allo stesso modo scopriamo anche j = m. Il numero è perciò adesso

    a2badefghijk4j

    Adesso a + 2 + b = b + a + d, quindi d = 2. E i+j+k=k+4+j, perciò i = 4. Il numero è così:

    a2ba2efgh4jk4j

    Adesso: a + 2 + e = 2 + e + f, cioè a = f. Allo stesso modo troviamo h = k. Il numero è diventato:

    a2ba2eagh4jh4j

    Poi 2 + e + a = e + a + g, cioè g = 2; perciò 2 + h + 4 = 13, cioè h = 7; j + 7 + 4 = 13, quindi j = 2. Siamo perciò arrivati a:

    a2ba2ea2742742

    Facilmente troviamo allora: **42742742742742**.
24. Indichiamo i numeri con
    $n-4, n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$
    la loro somma è S = 10n + 5, mentre T = 10n – 40. Perciò S − T = (10n + 5) − 10n + 40 = 45.
25. Scriviamo 9 numeri di 1 cifra, quindi 90 numeri di 2 cifre, arrivando a scrivere un totale di 189 cifre. Poi scriveremo 900 numeri di 3 cifre. Ovviamente la cifra cercata è una di questi ultimi numeri. Poiché 1997 – 189 = 1808 e 1808 = 3 × 602 + 2, vuol dire che la cifra è la seconda del 603° numero di 3 cifre, cioè di 702, quindi è 0.
26. Continuando la sequenza otteniamo:

    2; 4; 8; 16; 13; 7; 14; 9; 18; 17; 15; 11; **3**; …

    Avendo ritrovato il primo numero adesso ripeteremo all'infinito tutti i 18 numeri così ottenuti. Dato che 1998 = 18 × 11, vuol dire che il 1998° numero coincide con il diciottesimo ed è perciò 11.
27. Se indichiamo con n il numero presente nell'ultima cella della prima colonna, quello dell'ultima cella della seconda colonna sarà n + 1, mentre il primo della seconda colonna

sarà $2n$. Il primo elemento della terza colonna è perciò $2n + 1$, mentre l'ultimo è $3n$. Ciò significa che due elementi che occupano la stessa riga nella seconda e terza colonna hanno somma

$$2n + (2n + 1) = (n + 1) + 3n = 4n + 1$$

Perciò $4n + 1 = 38 + 43 = 81$, cioè $n = 20$. Infine le caselle della scacchiera sono $20^2 = 400$.

28. Costruiamo la procedura nella tabella per i primi passi

Ora	Lettere giunte	Lettere smistate	Lettere rimaste
12:00	1 2 3	3 2	1
12:05	4 5 6	6 5	1 4
12:10	7 8 9	9 8	1 4 7
12:15	10 11 12	12 11	1 4 7 10
12:20	13 14 15	15 14	1 4 7 10 13
12:25	16 17 18	18 17	1 4 7 10 13 16
12:30	19 20 21	21 20	1 4 7 10 13 16 19

Facilmente si vede che alle 12:55 siamo arrivati a 36 lettere. E sono rimaste le lettere 1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34. A questo punto togliamo due lettere ogni 5 minuti, a partire da quelle di numero più alto, quindi toglieremo la 13 alle 13:15.

29. Indichiamo con d la ragione, possiamo scrivere $a_4 + a_7 + a_{10} = a_4 + a_4 + 3d + a_4 + 6d = 3a_4 + 9d = 17$. Analogamente abbiamo $a_4 + a_5 + ... + a_{14} = 11a_4 + 55d = 77$. Quindi abbiamo

$$\begin{cases} 3a_4 + 9d = 17 \\ 11a_4 + 55d = 77 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 = \dfrac{11}{3} \\ d = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Ora $a_4 = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 = \frac{11}{3} - 3 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, quindi

$$a_k = a_1 + (k-1)\times d = \frac{5}{3} + (k-1)\times\frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k-1 = \left(13 - \frac{5}{3}\right)\times\frac{3}{2} \Rightarrow k = 18$$
.

Si poteva risolvere anche con ragionamenti meno scolastici, ma più logici. Nella prima somma ci sono il quarto, il settimo e il decimo termine, e la loro somma fa il triplo del termine centrale, quindi a7=17/3. Con ragionamento analogo, il termine centrale della seconda somma (di 11 termini), vale un undicesimo della somma, quindi a9=21/3=7. Abbiamo il settimo e il nono termine: l'ottavo vale la loro media: a8=19/3. Si trova agevolmente che la ragione vale 2/3. Il valore cercato, 13=39/3 si troverà al posto 18-esimo.

30. I numeri di due cifre divisibili per 17 sono 17, 34, 51, 68, 85, quelli divisibili per 23 sono 23, 46, 69, 92. Visto che l'ultima cifra scritta è 7, la penultima deve essere 1, dato che dei 9 numeri precedenti solo 17 verifica questa proprietà. A questo punto la terzultima deve essere 5 (51). Proseguendo in questo modo avremo: 85, 68, 46, 34, 23, 92, 69. Ci accorgiamo allora che le ultime cifre scritte sono: **6**9234**6**8517. Quindi a ritroso scriveremo sempre le stesse 5 cifre. Allora togliamo intanto le ultime 4 cifre che non si ripetono e dividiamo le rimanenti 1993 in gruppi di 5. Poiché 1993 = 5×398 + 3. Vuol dire che le prime 3 cifre sono le ultime 3 del periodo, cioè 346. La cifra cercata è perciò 3.

31. Dobbiamo cominciare a stabilire quanti 1 e quanti due ci sono nella somma. Quando abbiamo scritto *n* volte la cifra 1, abbiamo scritto 1 + 2 + … + (*n* – 1) volte la cifra 2. Dato che la precedente somma è $\frac{(n-1)\times n}{2}$, dobbiamo stabilire il primo *n* per cui $n + \frac{(n-1)\times n}{2} \geq 1234$. Cioè

$n^2 + n - 2468 \geq 0$. Dato che il discriminante di tale espressione è $\Delta = 9873$ e abbiamo: $99 < \sqrt{9873} < 100$, possiamo dire che se scriviamo 50 volte 1, abbiamo superato i 1234 elementi. Quindi dobbiamo scrivere 49 volte 1, e così scriveremo $\frac{48 \times 49}{2} = 1176$ volte 2, per un totale perciò di 1225 numeri scritti. Poi dovremmo scrivere altri 49 numeri uguali a 2, ma in effetti ne possiamo scrivere solo altri 1234 – 1225 = 9. Infine abbiamo scritto 49 volte 1 e 1185 volte 2. Perciò la somma cercata è 49 + 1185 × 2 = 2419

32. I numeri possono essere da 3 a 8 o da 4 a 9, dato che devono contenere 6, 7 e 8. Nel primo caso la massima somma ottenibile sarebbe 6 + 7 + 8 = 21, e perciò non è possibile. Nel secondo caso invece la massima somma ottenibile è 7 + 8 + 9 = 24. Quindi i numeri sono quelli da 4 a 9. Adesso dobbiamo stabilire come sono scritti sulle monete. La somma 23 si può ottenere solo come 6 + 8 + 9, quindi una moneta ha nelle sue facce i numeri 7 e 9. La somma 17 si può ottenere come 4 + 5 + 8 o come 4 + 6 + 7. Il primo caso però non è possibile, perché ogni somma deve contenere, per quanto detto, 7 oppure 9. Pertanto una moneta ha nelle sue facce 4 e 8. Pertanto l'altra moneta ha 5 e 6. Verifichiamo che effettivamente possiamo ottenere le altre due somme, con questi numeri: 4 + 5 + 7 = 16; 5 + 7 + 8 = 20.
33. Consideriamo prima gli interi da 0 a 999. Un numero di questo tipo si scrive xyz, dove ogni simbolo può rappresentare una cifra da 0 a 9 (ovviamente 002 = 2, 034 = 34 e così via). Di numeri per cui nessuna delle tre cifre è uguale a 7 ce ne sono ovviamente 9 × 9 × 9 = 729. Come possiamo sommare questi numeri? Nel modo normale, cioè sommando le cifre delle unità fra di loro, quindi riportando l'eccesso nella somma delle cifre delle decine e poi in quella delle centinaia. Le 729 cifre delle unità sono forma-

te da 9 gruppi di 81 cifre uguali, ciascuna da 0 a 9, escluso 7. Quindi la loro somma è

$$81\times(0 + 1 + \ldots + 6 + 8 + 9) = 81\times(9 \times 10/2 - 7) = 81 \times 38$$

La somma delle decine invece sarà 81×380, dato che ogni cifra vale per 10, e perciò la somma delle cifre delle centinaia è 81×3800. Quindi la somma cercata è

$$81 \times (38 + 380 + 3800) = 341\,658$$

Adesso consideriamo i numeri da 1000 a 1999 che non contengono 7. Ma questi numeri sostanzialmente hanno, rispetto ai 729 numeri precedenti, solo la cifra delle migliaia che per tutte è uguale ad 1. Quindi la loro somma è

$$729\,000 + 341\,658 = 1\,070\,658.$$

Ci rimangono adesso solo i numeri da 2000 a 2006, nessuno dei quali contiene 7, la cui somma è

$$2000+2001+2002 + 2003 + 2004 + 2005 + 2006 = 14021.$$

Infine la somma totale è

$$341658 + 1070658 + 14021 = 1426337.$$

34. Osserviamo che il primo valore sopra 1 è l'ottavo della sequenza e $8 = 3^2 - 1$; il successivo valore invece è il 23° e $23 = 5^2 - 2$. Non è difficile capire allora che avremo poi quello di posto $46 = 7^2 - 3$. In generale quello che si trova n celle sopra sarà, nella successione, quello che occupa il posto $(2n+1)^2 - n = 4n^2 + 4n + 1 - n = 4n^2 + 3n + 1$, quindi per $n = 100$, avremo l'elemento di posto 40301, che ha lo stesso valore del primo, poiché $40301 = 5 \times 8060 + 1$, quindi 1.

35. Abbiamo $a_5 - a_4 = 576$, $a_2 - a_1 = 9$. Ma anche $a_5 = ra_4$ e $a_2 = ra_1$, con r la ragione della progressione. Abbiamo perciò

$$\begin{cases} ra_4 - a_4 = 576 \\ ra_1 - a_1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 \times (r-1) = 576 \\ a_1 \times (r-1) = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = 64$$

Del resto $a_4 = r^3 a_1$, quindi $a_4 / a_1 = r^3$, perciò $r^3 = 64$, cioè $r = 4$. Allora $a_1 = 9/(4 - 1) = 3$. Infine la somma cercata è

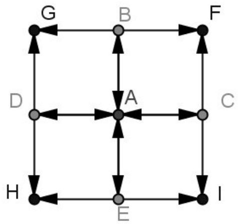
$$a_1 \times \frac{1-r^5}{1-r} = 3 \times \frac{1-4^5}{1-4} = 1023$$

Calcolo delle Probabilità

1. Le carte da ramino sono 52, divise in 4 semi da 13. In ogni seme ci sono 3 figure, quindi in totale 12 figure. La probabilità cercata è perciò 12/52=3/13.
2. Minore di 4 significa 1, 2 o 3. Quindi la probabilità è 3/6=1/2.
3. La probabilità è ovviamente 1, cioè vi è la certezza. Infatti in ogni caso nella busta C devono esserci tante biglie rosse quante le nere, quindi anche nelle altre due buste devono esserci tante biglie nere quante rosse.
4. Non è possibile che 12 di 13 carte siano ordinate, perché allora anche la tredicesima sarà nell'ordine, quindi la probabilità è 0.
5. Ci sono 6 possibili ordini di arrivo e uno solo di questi è quello che ci interessa. Pertanto la probabilità è 1/6.
6. Se la probabilità è 2/3, vuol dire che i libri sono proprio i 2/3 del totale, cioè di 27, perciò sono 18.
7. a) non è onesto, la probabilità di vincere è 1/6; b) è onesto, la probabilità è 3/6=1/2; c) è onesto, la probabilità è 3/6=1/2; d) non è onesto, la probabilità di vincere è 2/6.
8. Ci sono 36 casi possibili, quelli favorevoli sono (2, 1), (1, 2), (3, 2), (2, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 6) e (6, 5), quindi la probabilità è 10/36 = 5/18.
9. Facilmente è 3/8.
10. Le palline nere o dorate sono in totale 9, poiché possiamo scrivere 3/7=9/21, vuol dire che le palline in totale sono diventate 21; poiché prima erano 17 vuol dire che Mark ha aggiunto 4 palline bianche.
11. Dopo avere estratto la biglia ci sono tre possibilità:
    - la prima biglia è verde ed è quella che abbiamo estratta, quindi rimane ancora una biglia verde;
    - la prima biglia è verde e non l'abbiamo estratta;
    - la prima biglia è rossa e non l'abbiamo estratta.

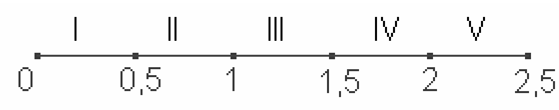
Di queste tre possibilità due ci sono favorevoli, quindi la probabilità è 2/3.

12. Per ogni lancio vi sono due possibilità, quindi in totale vi sono $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilità, di queste solo 2 sono a nostro favore. Quindi la probabilità di vittoria è 2/8 = 1/4 = 25%.
13. Consideriamo la figura. Sia A la posizione iniziale.



Come primo passo Gianni può andare in uno dei 4 punti B, C, D, E. Come secondo passo ha a disposizione 3 direzioni, dato che non può andare nella stessa direzione precedente. Una di queste direzioni lo riporta in A. Poiché Gianni sceglie a caso può anche ritornare in A. In totale i percorsi possibili sono perciò $4 \times 3 = 12$. Supponiamo, per fissare le idee che la casa di Carlo sia in F. Ci può arrivare in 2 modi: ABF o ACF. Quindi la probabilità è 2/12=1/6.

14. Consideriamo lo stuzzicadenti diviso nelle cinque parti mostrate in figura:



Costruiamo la seguente tabella che calcola la somma a seconda di quale settore si sceglie per spezzare il segmento.

Settore	I	II	III	IV	V
Somma	0+2=2	1+2=3	1+1=2	2+1=3	2+0=2

Quindi la probabilità è 2/5.

15. Dopo avere estratto la biglia la seconda volta ci sono cinque possibilità:
    la prima biglia è verde l'abbiamo estratta la prima e anche la seconda volta, quindi rimane ancora una biglia verde;
    la prima biglia è verde l'abbiamo estratta la prima volta ma non la seconda volta, quindi rimane ancora una biglia verde;
    la prima biglia è verde l'abbiamo estratta la seconda volta ma non la prima volta, quindi rimane ancora una biglia verde;
    la prima biglia è verde e non l'abbiamo estratta nessuna delle due volte;
    la prima biglia è rossa e non l'abbiamo estratta.
    Di queste cinque possibilità quattro ci sono favorevoli, quindi la probabilità è 4/5.
16. Consideriamo in quanti modi diversi possiamo scrivere il 24 come somma di due primi: 5 + 19, 7 + 17, 11 + 13. Quindi solo 3 modi. Invece 2 numeri fra 10, tralasciando l'ordine, possono scegliersi in $\frac{10\times 9}{2}=45$ modi. Perciò la probabilità cercata è $\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$.
17. La carta può essere rossa da entrambe le parti e ci sono due possibilità di metterla con la parte rossa visibile, oppure rossa e verde, con una sola possibilità. Quindi ci sono 2/3 probabilità.
18. I casi possibili sono (1, 2, 3) con le relative permutazioni e (2, 2, 2). Uno solo di questi è favorevole, quindi la probabilità è 1/7.
19. Possiamo scegliere i due numeri in $9^2 = 81$ modi diversi, considerando l'ordine di scelta. Lo 0 si ottiene in 9 casi (1+9, 2+8, …, 9+1), l'1 in 8 casi (2+9, 3+8, …, 9+2) e così via sempre diminuendo i casi. Quindi la massima probabilità si ha per 0.

20. Nel primo dado ci sono 4 punteggi dispari e due pari, nel secondo invece 4 pari e 2 dispari. Il punteggio è dispari se abbiamo un punteggio pari e uno dispari. I casi possibili sono sempre 36, quelli favorevoli sono $4 \times 4 + 2 \times 2 = 20$, quindi la probabilità è $20/36 = 5/9$.
21. La probabilità che sia scelta una femmina è p, quella che sia scelta un maschio è 2/3p. ovviamente p+2/3p=1, quindi 5/3p=1, cioè p=3/5. Quindi le femmine sono i 3/5 del totale, perciò i maschi sono i 2/5.
22. Il giocatore deve segnare al primo tiro e sbagliare il secondo, la probabilità perciò è data da $0{,}25 \times 0{,}75 = 0{,}1875$, dato che gli eventi sono indipendenti.
23. Le mattonelle possono essere scelte in $\frac{5\times4}{2} = 10$ modi, poiché la prima mattonella si sceglie tra 5 e la seconda tra 4. ma l'ordine di scelta è ininfluente, quindi dividiamo a metà. Di questi dieci modi uno solo contiene le due S, quindi la probabilità è 1/10.
24. ab + c è pari se ab e c sono entrambi pari o entrambi dispari. ab è pari quando uno almeno fra a e b è pari. Se a è pari ci sono 2 scelte, per ognuna di queste abbiamo 5 scelte per b, quindi 10. Se a è dispari e b pari ci sono 6 scelte. Quindi un totale di 16 scelte. Per ognuna di queste scelte dobbiamo scegliere c pari, che si fa in 2 modi. Quindi totale 32 scelte. ab è dispari quando entrambi a e b sono dispari. I casi favorevoli stavolta sono 3×3. Anche c deve essere dispari, quindi stavolta ci sono $9 \times 3 = 27$ scelte. Quindi in totale ci sono 59 casi favorevoli. I casi possibili sono $5^3 = 125$. La probabilità è 59/125.
25. Perché il termine medio sia 3 dobbiamo scegliere (1, 3) o (2, 3) e altri 4 numeri. 6 numeri a caso da 10 si scelgono in $\binom{10}{4}$ modi, dato che l'ordine non conta. Questi sono i casi possibili, per i casi favorevoli invece dobbiamo scegliere 4

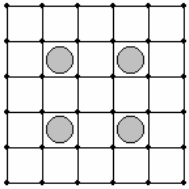
numeri da 7, che si fa in $\binom{7}{4}$ e poi dobbiamo scegliere 1 o 2, che si fa in 2 modi. Perciò la probabilità è

$$\frac{2\times\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}=\frac{2\times\frac{7!}{4!3!}}{\frac{10!}{4!6!}}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{10\times 9\times 8}{720}}=\frac{1}{3}$$

26. Un punteggio non inferiore a 5 significa 5 o 6, quindi la probabilità di ottenerlo al primo lancio è 2/6 = 1/3. Ottenere almeno 5 volte un punteggio del genere significa o ottenerlo 6 volte o ottenerlo 5 volte. La probabilità di ottenerlo tutte le volte è $(1/3)^6$. La probabilità di ottenerlo 5 volte su 6 è $(1/3)^5 \times 2/3 \times 6$. Abbiamo moltiplicato per 6 poiché la volta in cui non otteniamo quanto richiesto può essere una delle sei volte. La probabilità richiesta è unione delle due, quindi è $\frac{1}{3^6}+\frac{12}{3^6}=\frac{13}{729}$.
27. Ottenere un 6 in 4 lanci è il complementare di non ottenere alcun 6. Non ottenere 6 al primo lancio ha probabilità 5/6, poiché i lanci sono indipendenti, nei primi due lanci è $(5/6)^2$, nei primi tre $(5/6)^3$ e nei primi quattro $(5/6)^4$. Perciò la probabilità è $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,52$. Ottenere un doppio sei lanciando due dadi è il complementare di non ottenerne nessuno. Non ottenere 6 lanciando due dadi al primo lancio è 35/36. Ragionando come prima non ottenerlo per 24 volte di fila ha probabilità $(35/36)^{24}$. Perciò la probabilità cercata è $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,49$. Quindi è più probabile il primo evento.
28. La probabilità che vengano fuori tutte facce uguali è 2/8 = 1/4, infatti ci sono $2^3 = 8$ casi possibili (TTT, TTC, TCT,

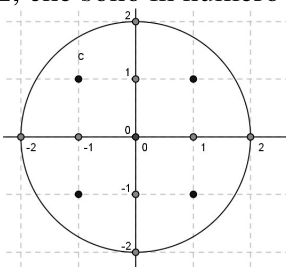
CTT, CCT, CTC, TCC, CCC), e solo due di questi sono favorevoli a Ben. Quindi la vincita attesa di Ben è $200/4 = $50, mentre la sua perdita attesa è $100×3/4 = $ 75. quindi il gioco è più conveniente per Adam.

29. La pedina all'inizio è nella casella (3, 3), dopo un lancio si può trovare in una delle 4 caselle seguenti



E dopo ancora un altro lancio ciascuna delle 4 pedine precedenti può muoversi lungo le 4 posizioni diagonali, quindi ciascuna ha 1 possibilità su 3 di tornare in (3, 3). Quindi abbiamo 4 × 4 possibili mosse e di queste a noi favorevoli ve ne sono 4. la probabilità è perciò 4/16 = 1/4.
In pratica, se sul dado rosso è uscito pari al primo lancio, al secondo deve uscire dispari, e viceversa (prob.=1/2); analogamente per il dado blu (prob.=1/2). La probabilità che entrambi gli eventi avvengano è 1/2x1/2=1/4.

30. I punti le cui coordinate, intere o no, in valore assoluto non superano 4, sono tutti quelli le cui ascisse e ordinate sono comprese tra -4 e 4, quindi quelli con coordinate intere sono 9 × 9 = 81. Quelli che distano dal centro massimo 2, sono quelli dentro la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, che sono in numero di 13.



Quindi la probabilità è $\frac{13}{81}$

31. Possiamo effettuare $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2}=10$ diverse terne. Quelle che verificano la disuguaglianza triangolare e quindi permettono di costruire un triangolo, non devono contenere il 2, perché la differenza di due qualsiasi degli altri non è inferiore a 2. Delle rimanenti 4 terne ne vanno bene solo 3: (4, 6, 8); (4, 8, 10); (6, 8, 10). Infine la probabilità cercata è 3/10 = 30%.
32. Gli orari di passaggio degli autobus nella fascia scelta da Peter sono 7:05 e 7:20 per il primo e 7:10, 7:30 per il secondo. Quindi per aspettare non più di 4 minuti deve arrivare nelle fasce orarie: 7:01 – 7:05; 7:06 – 7:10; 7:16 – 7:20; 7:26 – 7:30. Cioè 16 minuti su 30. È più probabile quindi che aspetti non più di 4 minuti.
33. Il numero di sfere di ogni colore le indichiamo con r, b, a, v; il numero totale con $n = r + b + a + v$. Il numero di casi possibili è $\binom{n}{4}$, il numero di casi favorevoli, per ognuno dei 4 eventi è:
(a) $\binom{r}{4}=\frac{r\times(r-1)\times(r-2)\times(r-3)}{24}$;
(b) $\binom{b}{1}\times\binom{r}{3}=b\times\frac{r\times(r-1)\times(r-2)}{6}$;
(c) $\binom{b}{1}\times\binom{a}{1}\times\binom{r}{2}=b\times a\times\frac{r\times(r-1)}{2}$;
(d) $\binom{b}{1}\times\binom{a}{1}\times\binom{r}{1}\times\binom{v}{1}=b\times a\times r\times v$
Le 4 quantità devono essere uguali. Quindi deve essere:
$$\frac{r\times(r-1)\times(r-2)\times(r-3)}{24}=b\times\frac{r\times(r-1)\times(r-2)}{6}\Rightarrow\frac{r-3}{4}=b$$

$$b \times \frac{r \times (r-1) \times (r-2)}{6} = b \times a \times \frac{r \times (r-1)}{2} \Rightarrow \frac{r-2}{3} = a$$

$$b \times a \times \frac{r \times (r-1)}{2} = b \times a \times r \times v \Rightarrow \frac{r-1}{2} = v$$

Il più piccolo valore di r per cui a, b e v risultano interi è per $r - 3 = 8$, cioè $r = 11$, con $b = 2$, $a = 3$, $v = 5$. Quindi le sfere devono essere minimo 21.

34. Dobbiamo considerare due casi, quello in cui al primo lancio esce pari, che ha probabilità 2/3 di accadere e quello in cui esce dispari, con probabilità 1/3. Nel primo caso, prima del secondo lancio il dado avrà punti 1, 1, 3, 2, 3, 4. Quindi la probabilità che esca 2 è 1/6. Quindi la probabilità che esca 2 al secondo lancio, se al primo è uscito pari, è 2/3 × 1/6 = 1/9, perché i due eventi sono indipendenti. Se invece è uscito dispari al primo lancio, al secondo lancio i punti sono 2, 2, 6, 4, 6, 8 e la probabilità che esca 2 è 1/3. Quindi la probabilità che esca 2 al secondo lancio se al primo è uscito dispari è 2/3 × 1/3 = 2/9. Infine la probabilità che sia uscito 2 al secondo lancio è somma delle due probabilità, perché unione di eventi incompatibili, cioè 1/9 + 2/9 = 1/3.

35. Dire che la probabilità è 1/100, vuol dire che M ha 10 divisori. Ricordiamo che se un numero scomposto in fattori primi è $p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... \times p_k^{a_k}$, questo ha $(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times ... \times (a_k + 1)$ divisori. Poiché 10 = 9 + 1, oppure 10 = 2 × 5 = (1 + 1) × (4 + 1), Quindi $M = p^9$, oppure $M = p^4 \times q$, con p e q numeri primi. Nel primo caso, il massimo valore che può assumere p affinché sia $M \leq 1000$, è p = 2, con M = 512. Nel secondo caso, invece p = 2 o 3, perché $5^4 = 625$ e poi 625 × 2 > 1000. Se p = 2, il massimo valore di q è 61, e M = 16 × 61 = 976. Nel secondo caso q = 11 e M = 81 × 11 = 891. Quindi il massimo M è 976.

Statistica

1. Conviene portare le età in mesi. Così i ragazzi hanno rispettivamente 177 mesi, 181 mesi e 176 mesi. La media è così $\frac{177+181+176}{3}=\frac{534}{3}=178$ mesi, cioè 14 anni e 10 mesi. Oppure, più semplicemente, il primo ha 1 mese più del terzo e il secondo ha 5 mesi in più. Quindi ci sono 6 mesi da divider per 3, cioè 2 mesi, da aggiungere all'età del terzo, ottenendo ancora una volta 14 anni e 10 mesi.
2. Se il voto medio è 4,15, allora la somma di tutti i voti deve essere 30 × 4,15 = 124,5. che non può essere perché la somma di numeri interi non può non essere intero.
3. La somma delle 3 età è di 36 × 3 = 108 anni, quella di due di essi è 40 × 2 = 80 anni, quindi Ben ha 108 – 80 = 28 anni. Quindi Andrew ha 28 + 8 = 36 anni e Calvin 80 – 36 = 44.
4. Se i 7 numeri hanno media 13, vuol dire che la loro somma è 7 ×13 = 91. Poiché la somma dei 5 numeri noti è 56, vuol dire che $x + y = 91 – 56 = 35$.
5. Possiamo costruire la seguente tabella, in cui riportiamo le diverse velocità, espresse in Km al minuto.

Nome	Velocità (Km/min)
Alison	1/20 = 0,05
Bina	1/50 = 0,02
Curtis	3/30 = 0,1
Daniel	5/50 = 0,1
Emily	5/20 = 0,25

Quindi Emily va mediamente più veloce.

Per completezza di ragionamento, bastava osservare l'inclinazione delle varie rette che passano per ciascuno dei punti segnati e per l'origine: la più bassa è quella relativa al punto del più veloce. Quindi Emily è più veloce di tutti.

6. Si ha: $\frac{80+70+60+90+80}{5}=\frac{380}{5}=76$.
7. Se la media è 11 la somma dei numeri è 55.
8. La media era (87+83+88)/3= 258/3=86. Dato che 90= 86+4, è come se tutti e quattro i voti fossero di 86+1=87, che è perciò la nuova media. La risposta esatta è la B.
9. Non sappiamo quanto vale il suo voto peggiore, ma il minimo che può ottenere è 0, quindi se avesse avuto 0, la somma dei suoi otto punteggi escluso il peggiore, sarebbe stata la stessa dei nove punteggi, cioè 612. In questo modo la media diverrebbe 612/8, cioè 76,5. Ovviamente se il voto peggiore fosse maggiore di 0, la somma senza di esso sarebbe inferiore a 612 e quindi la media non potrebbe superare 76,5 che è perciò il massimo ottenibile.
10. Se Dean ha fatto 252 punti in 28 partite, vuol dire che la sua media punti a partite è stata 252/28 = 9. Quindi Ruth ha fatto 9,5 punti a partita, in media, e poiché ha giocato 18 partite, ha fatto un totale di 9,5 ×18 = 171 punti.
11. Sia N il nuovo voto, la media è (71+77+80+87+N)/5 = (315+N)/5 = 63 + N/5. Affinché la media sia intera, N deve essere multiplo di 5. Inoltre la minima media è 63, la massima 63 + 100/5 = 83, quindi fra i valori proposti solo 82 va bene e si ottiene se N = 95.
12. La somma dei suoi voti è 5 × 3,4 = 17. Dato che ha avuto una volta almeno ciascuno dei voti da 2 a 5, il quinto voto è 17 – 2 – 3 – 4 – 5 = 3.
13. Per semplificare supponiamo che i voti a disposizione fossero stati solo 100, tanto ciò non cambia il risultato. Ciò significa che 60 di questi voti erano divisi fra 3 candidati in ragione di 48 (80% di 60), 9 e 3. Quindi il primo non ha sicuramente vinto, perché se i successivi 40 voti andassero tutti al secondo candidato quello prenderebbe un totale di 49 voti e risulterebbe vincente. Invece l'ultimo candidato ha certamente perso, perché anche ricevendo tutti i voti non scrutinati arriverebbe a 43. Infine, per essere sicuro

della vittoria, un candidato dovrebbe avere ricevuto, senza sapere quanti voti hanno ricevuto gli altri due, almeno 51 voti, che rappresentano il 51/60% = 85% dei voti scrutinati.

14. Se la media è 4, vuol dire che la somma dei numeri è 4 × 4 = 16. Per avere la massima differenza, il più piccolo dei 4 numeri deve essere 1, quindi 2 e 3 e 10. Perciò la media fra i numeri intermedi è (2+3)/2=2,5.
15. Dato che il rapporto è 11/10, possiamo sempre ipotizzare che ci sono 10 maschi e 11 femmine. Dire che la media delle femmine è 34, vuol dire che la somma delle loro età è 34 × 11 = 374; analogamente quella dei maschi è 32 × 10 = 320. Quindi la somma delle età di tutti e 21 è 694. Quindi la media è 694/21, che è circa 33,05.
16. Supponiamo che vi siano proprio 3 ragazzi e 2 ragazze. La somma delle età è perciò 45 anni e 15 mesi più 28 anni e 14 mesi, cioè 75 anni e 5 mesi. Quindi dividendo per 5 otteniamo 15 anni e 1 mese.
17. Indichiamo con *m* il numero dei maschi e con *f* quello delle femmine, quindi si ha che la somma delle età è 40 × (*m* + *f*); ma è anche 50 × *m* + 35 × *f*. quindi avremo:

$$40 \times (m + f) = 50 \times m + 35 \times f$$

$$40\times\left(\frac{m}{f}+\frac{f}{f}\right)=50\times\frac{m}{f}+35\times\frac{f}{f}\Rightarrow$$

da cui: $40\times\frac{m}{f}+40=50\times\frac{m}{f}+35\Rightarrow$ cioè i maschi

$$10\times\frac{m}{f}=5\Rightarrow\frac{m}{f}=\frac{1}{2}$$

sono in numero doppio rispetto alle femmine.

18. La somma dei sei numeri è

$$1867 + 1993 + 2019 + 2025 + 2109 + 2121 = 12134.$$

I quattro numeri la cui media è 2008 hanno somma uguale a 4 × 2008 = 8032. Perciò la somma dei rimanenti numeri è 12134 − 8032 = 4102 e quindi la loro media è 4102/2 =

2051. Effettivamente esistono due numeri che soddisfano la richiesta, e sono 1993 e 2109.

19. Per avere una media finale di almeno 90, deve avere una somma di punteggi non inferiore a $6 \times 90 = 540$. Dato che nei primi quattro esami ha totalizzato $4 \times 88{,}5 = 354$, negli altri due deve prendere complessivamente almeno $(540 - 354) = 186$, quindi una media di almeno 93.
20. La somma di tutti i numeri è $7 \times 7 = 49$. Supposto che i primi 6 numeri siano i più piccoli possibili, cioè 1, 2, 3, 4, 5, 6 il massimo è $49 - (1+2+3+4+5+6) = 49 - 21 = 28$.
21. Siano n i componenti della famiglia, la somma delle loro età è $18n$. Se togliamo l'età del padre la somma delle età diventa $18n - 38$, ma anche $14 \times (n - 1)$. Deve perciò aversi
$$18n - 38 = 14\times(n - 1) \Rightarrow 4n = 24 \Rightarrow n = 6$$
Quindi i componenti la famiglia sono 6, i bambini sono perciò 4.
22. Il numero totale di minuti guardati dai maschi è $45m$, quello delle femmine è $65f$, quello di tutti è $50 \times (m + f)$. deve aversi perciò:
$$45m + 65f = 50 \times (m + f) \Rightarrow 5m - 15f = 0 \Rightarrow m - 3f = 0$$
Cioè $m = 3f$. I maschi sono perciò il triplo delle femmine.
23. Il 3 si ripete il doppio di volte dello 0 e del 4; il 2 il doppio di volte del 3. Quindi supponendo che minimo lo 0 e il 4 si ripetano 1 sola volta, il 3 si ripeterà 2 volte e il 2 4 volte. Quindi in totale minimo si sono fatte $(1 + 1 + 2 + 4) = 8$ volte.
24. Se la mediana è 7, vuol dire che se ordiniamo i numeri, il terzo di essi è 7. Gli altri quattro devono avere una somma di $35 - 7 = 28$, dato che la media è 7. Dato che il rango è 6, se il minimo fosse 1, il massimo dovrebbe essere 7, ma ciò non è possibile, dato che i numeri devono essere tutti distinti, quindi il massimo deve essere almeno 9. Se è 9, il quarto è 8 e il minimo sarebbe 3, e gli altri due dovrebbero avere somma $28 - 12 = 16$, che non è possibile. Se il mas-

simo è 10, il minimo è 4, gli altri due hanno somma 14 e ci sono due casi: 4, 5, 7, 9, 10 oppure 4, 6, 7, 8, 10. Se il massimo è 11, il minimo è 5, quindi il secondo 6, ma allora il quarto dovrebbe essere 28 – 22 = 6, che non è possibile. Quindi ci sono solo le due soluzioni viste prima.

25. Il terzo ha ottenuto $\frac{x+y}{2}$ punti; il quarto $\frac{x+y+\frac{x+y}{2}}{3}=\frac{x+y}{2}$; non è difficile vedere che anche il quinto e tutti quelli che lo seguono, compreso l'ultimo, hanno avuto $\frac{x+y}{2}$ punti.

26. Indichiamo con le lettere da *a* fino a *j* i numeri pensati dalle dieci persone, nell'ordine del numero pronunciato. Avremo allora

$$\begin{cases} b+j=2; a+c=4 \\ b+d=6; c+e=8 \\ d+f=10; e+g=12 \\ f+h=14; g+i=16 \\ h+j=18; i+a=20 \end{cases}$$

Abbiamo allora $f = 14 - h = 14 - 18 + j = -4 + 2 - b = -2 - 6 + d = -8 + 10 - f$. Quindi $f = -2 - f$, cioè $f = 1$.

27. Diciamo n il numero di prove svolte. Prima dell'ultima prova, la somma dei punti ottenuti era $27n$, poi è diventata $28(n + 1)$, ma ovviamente $27n + 40 = 28(n + 1)$, cioè $n = 12$. Allora prima dell'ultima prova aveva $27 \times 12 = 324$ punti totali, che sarebbero dovuti diventare $30 \times 13 = 390$, quindi avrebbe dovuto prendere 66 punti.

28. La mediana è il terzo elemento della distribuzione ordinata. Il problema è che non sappiamo che valore ha N. Se N ≤ 43, la mediana è 43; se $43 <$ N ≤ 46, la mediana è N; se N > 46, la mediana è 46. Consideriamo il primo caso. La

media deve essere quindi 43, cioè 42+43+46+49+N=43×5, cioè 180+N=215, quindi N = 35. Passiamo al terzo caso. Deve essere 180+N=46×5, cioè N = 50. Adesso vediamo il secondo caso. Stavolta deve essere 180+N=N×5, cioè 4N = 180, quindi N = 45. Perciò sono possibili 3 valori per N.

29. Dato che la moda è 76 e un solo voto si è ripetuto due volte, questo voto è proprio 76. Quindi 4 dei 6 voti sono 50, 76, 76, 90. La mediana è la media aritmetica fra il terzo e il quarto voto, che perciò sono i due 76. Quindi i voti ordinati sono 50, x, 76, 76, y, 94; con x e y da determinare. Dato che la media è 74, la somma dei sei voti è 6 × 74 = 444, quindi $x + y = 304 - (50 + 76 + 76 + 94) = 148$. Minimo $x = 51$ e massimo $y = 93$. Se $x = 51$, $y = 97$, quindi non è possibile. Se $y = 93$, $x = 55$. Quindi il minimo valore per x è 55. Può arrivare x a 75? In questo caso sarà $y = 73$, ma deve essere $y > 76$, quindi se $y = 77$, $x = 71$. Perciò i valori possibili per x sono tutti quelli da 55 a 71, che sono un totale di 17 valori.

30. Dopo le prime 5 partite aveva segnato un totale di $5 \times M_5$ punti, in cui M_5 è la media dopo 5 partite. Dopo 9 partite ha segnato $5 \times M_5 + 68$ punti, che è uguale anche a $9 \times M_9$ (Media dopo 9 partite). E si ha:

$$M_9 > M_5 \Rightarrow \frac{5 \times M_5 + 68}{9} > M_5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 \times M_5 + 68 > 9M_5 \Rightarrow M_5 < 17$$

Quindi $M_9 \geq 17$, e, detto X i punti da fare nella decima partita: $M_{10} = \frac{9 \times M_9 + X}{10} \geq \frac{9 \times 17 + X}{10} = \frac{153 + X}{10}$. Poiché deve essere $M_{10} \geq 18$, si avrà:

$$\frac{153 + X}{10} \geq 18 \Rightarrow X \geq 180 - 153 = 27 .$$

Deve fare quindi almeno 27 punti.

Bibliografia

C. Di Stefano, *Quaderni di matematica ricreativa - Aritmetica*, Circolo Fibonacci, Gela, 2009

C. Di Stefano, *Quaderni di matematica ricreativa – Geometria*, Circolo Fibonacci, Gela, 2010

B. Auerbach, O. Chein *Problem solving through recreational mathematics*, Dover, New York, 2000

C. G. Bachet *Problemes plaisants et dèlectables qui se font par le nombres*, V edizione, rivista da A. Labosne, Librairie scientifique et technique Alber Blanchard, Paris, 1959

A. H. Beiler *Recreations in the theory of numbers*, Dover, New York, 1964

Cajori F., *A History of Mathematical Notations*, Dover, New York, 1993

I. Ghersi *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano 1978

E. Lucas *Récréations mathématiques*, in 4 volumi, Gauthier–Villars. et fils, imprimeurs–libraires, Paris, 1882

W.W. Rouse Ball, H.S.M. Coxeter, *Mathematical recreations and essays*, Dover, New York 1987