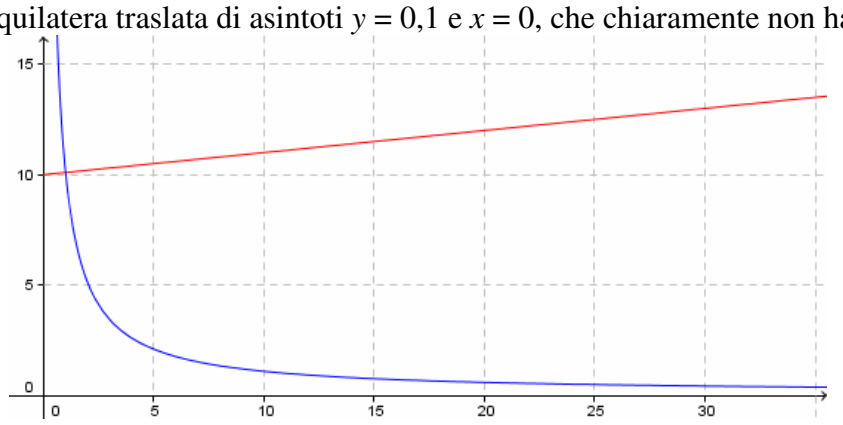
Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto:

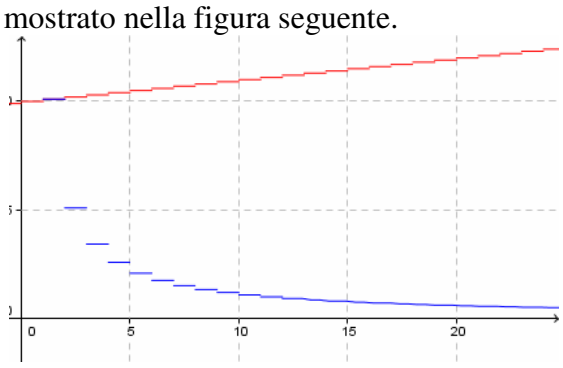
1. individua l'espressione analitica delle funzioni e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano.

Soluzione

Dopo aver osservato che non abbiamo a che fare con delle funzioni, poiché x è intero non negativo, cosa che il testo non dice, le funzioni che si "comportano" come queste sono: $f(x) = 10 + 0{,}1x$ e $g(x)=\frac{10+0{,}1x}{x} \Rightarrow g(x)=\frac{10}{x}+0{,}1$, in entrambi i casi si ha $x \geq 0$. La prima è una semiretta, la seconda il ramo di un'iperbole equilatera traslata di asintoti $y = 0{,}1$ e $x = 0$, che chiaramente non ha massimi né minimi.



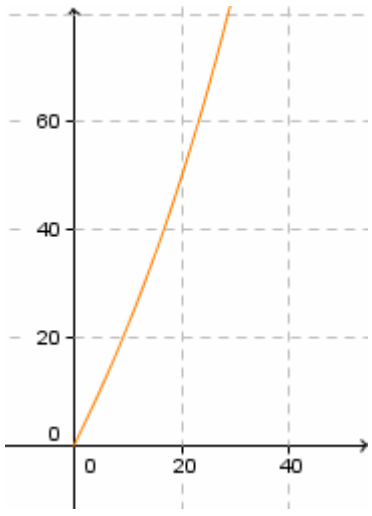
Il significato reale del modello matematico è che il costo naturalmente aumenta all'aumentare dei minuti di conversazione, mentre il costo medio al minuto tende a 0,1 euro, sempre all'aumentare dei minuti.
Questo è ciò che si "aspettava" chi ha proposto il problema, invece la corretta risposta è $f(x) = 10 + 0{,}1 \cdot \lceil x \rceil$ e $g(x)=\frac{10+0{,}1\cdot\lceil x\rceil}{\lceil x\rceil} \Rightarrow g(x)=\frac{10}{\lceil x\rceil}+0{,}1$, in cui $\lceil x\rceil$ indica il cosiddetto *ceiling* o soffitto, cioè il massimo intero contenuto in x, dato che per esempio per 3,2 minuti pagheremo quanto per 3 minuti e per 3,6 quanto per 4 minuti. Pertanto abbiamo non una semiretta ma l'unione di infiniti segmenti paralleli all'asse delle x, con salto di discontinuità per ogni valore intero pari a 0,1 e altrettanti infiniti segmenti paralleli all'asse x con andamento iperbolico come mostrato nella figura seguente.



2. Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che: $g(x_1)=\frac{g(x_0)}{2}$ Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

Soluzione

Dobbiamo risolvere l'equazione $\frac{10}{x_1}+0,1=\frac{5}{x_0}+0,05$ nell'incognita x_1, pertanto si ha: $\frac{10}{x_1}=\frac{5}{x_0}-0,05 \Rightarrow \frac{10}{x_1}=\frac{5-0,05x_0}{x_0} \Rightarrow x_1=\frac{10x_0}{5-0,05x_0}$, che può scriversi nella forma più tradizionale: $y=\frac{10x}{5-0,05x}$, che è ancora un'iperbole di asintoto verticale $x = 100$.



Se $x_0 = 100$ abbiamo $g(x_1)=\frac{g(100)}{2}=\frac{5}{100}+0,05=0,1$, che è il costo al minuto.

Sul suo sito web l'operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse:

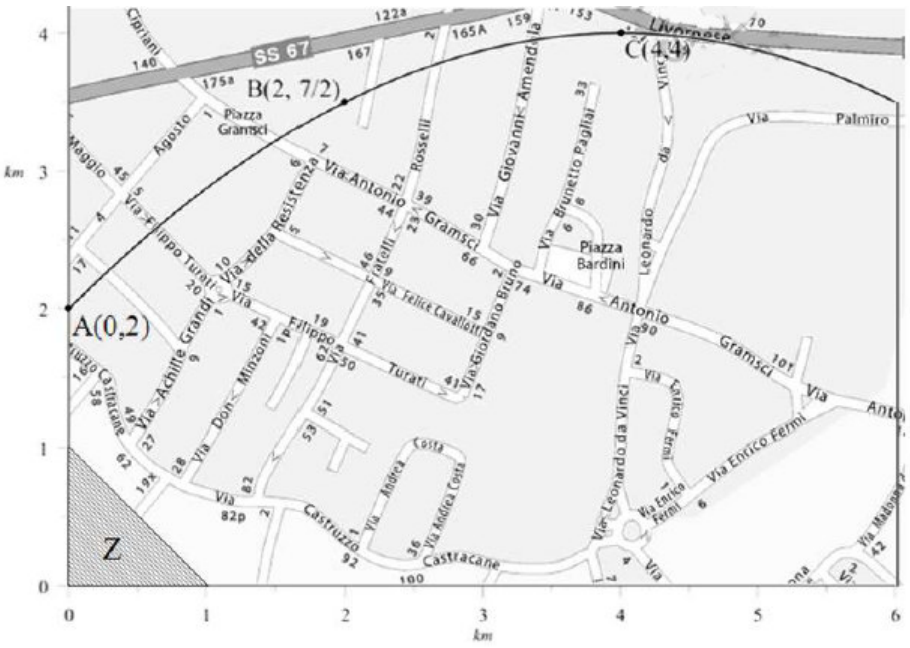


Figura 1

La zona è delimitata dalla curva passante per i punti *A*, *B* e *C*, dagli assi *x* e *y*, e dalla retta di equazione $x = 6$; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione.

3. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti *A*, *B* e *C*. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio"; verifica se effettivamente è così.

Soluzione

Dobbiamo determinare i parametri di una parabola canonica di asse di simmetria parallelo all'asse y, passante per i punti dati. Cioè detto $y = ax^2 + bx + c$, dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} 2 = c \\ \frac{7}{2} = 4a + 2b + c \\ 4 = 16a + 4b + c \end{cases}$, le cui soluzioni sono: $\begin{cases} a = -\frac{1}{8} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$, quindi $y = -\frac{1}{8}x^2 + x + 2$. Determiniamo l'area del territorio: $\int_0^6 \left(-\frac{1}{8}x^2 + x + 2\right)dx = \left[-\frac{x^3}{24} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^6 = -9 + 18 + 12 = 21$. E poiché 21 · 0,96 = 20,16 vuol dire che la zona non coperta dovrebbe essere pari a 0,84. Invece l'area della regione non coperta dal segnale è 0,5. Quindi la zona coperta è 20,5 che è pari a 20,5/21 > 97,6%.

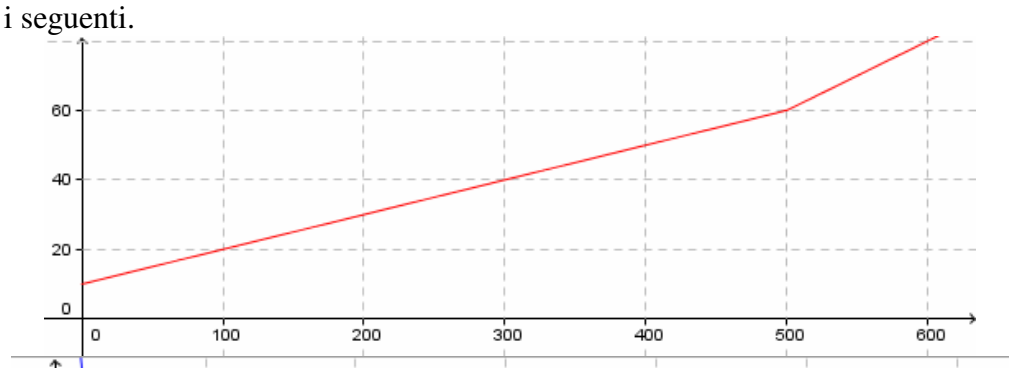
Potevamo anche usare il teorema di Archimede per calcolare l'area del segmento parabolico, in questo caso come somma fra il segmento parabolico ottenuto intersecando la parabola con la retta che passa per A e per il punto di ascissa 6 e il trapezio rettangolo sottostante. Ricordiamo che il teorema recita: l'area di un segmento parabolico è uguale a $\frac{4}{3}$ l'area del triangolo di vertici le intersezioni P e Q fra la retta e la parabola e il punto della parabola la cui tangente è parallela al segmento PQ. Determiniamo l'ordinata del punto Q della parabola di ascissa 6: $-\frac{1}{8}6^2 + 6 + 2 = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$, il punto P è il punto A. La retta per PQ ha coefficiente angolare $m = \frac{7/2 - 2}{6 - 0} = \frac{1}{4}$, quindi il terzo vertice del triangolo si ha quando la tangente alla parabola in esso ha coefficiente angolare ¼. Il coefficiente angolare della parabola canonica è $m = 2ax + b$, in questo caso è $2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot x + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 3$. Quindi il punto è (3; $\left(3; -\frac{1}{8}3^2 + 3 + 2\right) \equiv \left(3; \frac{31}{8}\right)$. Infine l'area del segmento parabolico è $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & \frac{31}{8} & 1 \\ 6 & \frac{7}{2} & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{2}{3} \cdot \left| -\frac{27}{4} \right| = \frac{9}{2}$. L'area del trapezio rettangolo è $\frac{2 + 7/2}{2} \cdot 6 = \frac{33}{2}$ e quindi l'area cercata è $\frac{9}{2} + \frac{33}{2} = 21$.

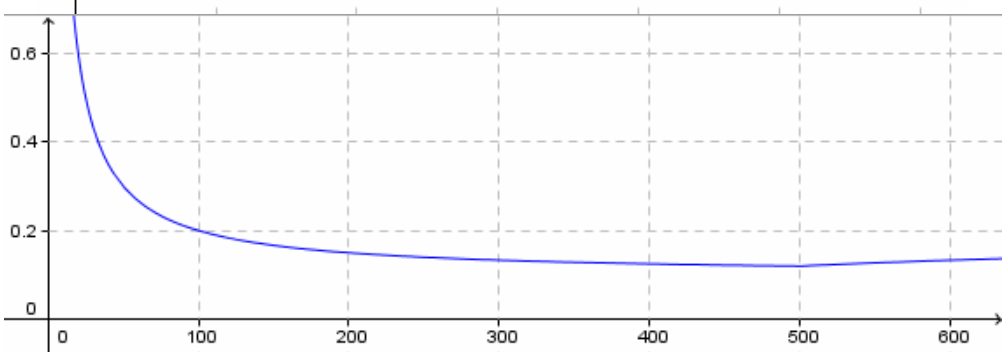
L'operatore di telefonia modifica il piano tariffario, inserendo un sovrapprezzo di 10 centesimi per ogni minuto di conversazione successivo ai primi 500 minuti.

4. Determina come cambiano, di conseguenza, le caratteristiche delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, riguardo agli asintoti, alla monotonia, continuità e derivabilità, individua eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $g(x)$ e della sua derivata e spiegane il significato nella situazione concreta.

Soluzione

Avremo: $f(x)=\begin{cases}10+0,1x & x\le 500\\ 60+0,2\cdot(x-500)=0,2x-40 & x>500\end{cases}$ e $g(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{x}+0,1 & x\le 500\\ 0,2-\dfrac{40}{x} & x>500\end{cases}$ che sono le unioni rispettive di un segmento con una semiretta e di due rami di iperbole. I grafici in sistemi di riferimento dimetrici sono i seguenti.





Le funzioni sono entrambe continue. Per $x = 500$ non sono derivabili. La $f(x)$ cambia coefficiente angolare, a sinistra 0,1 e a destra 0,2 rimanendo comunque crescente, non ha estremi relativi, solo un minimo assoluto per $x = 0$. La $g(x)$ analogamente ha diversa derivata sinistra $\left(\left[-\dfrac{10}{x^2}\right]_{x=500}=-0,00004\right)$ e derivata destra $\left(\left[\dfrac{40}{x^2}\right]_{x=500}=0,00016\right)$ in questo caso vi è cambio di crescenza e il punto è perciò di minimo relativo, anzi assoluto pari a $\left(\dfrac{10}{500}+0,1=0,2-\dfrac{40}{500}=0,12\right)$. Questa funzione ha anche gli asintoti unilaterali di equazioni rispettive $x = 0$ e $y = 0,2$.

Osservazioni finali

Problema imbarazzante per la sua semplicità, in pratica poteva svolgersi con le nozioni di terzo anno, perché anche l'area sottesa dal segmento parabolico poteva trovarsi con il teorema di Archimede. Le nozioni richieste sulla derivabilità nell'ultimo quesito potevano chiedersi in termini non differenziali.

Il solito tentativo di cercare di proporre un quesito pseudo-reale fatto da chi non è abituato e ha una mentalità tradizionale. In effetti non avevamo una funzione come si intende di solito, piuttosto una successione o se si preferisce una funzione a tratti, usando quindi la funzione *ceiling*. Usando questo approccio non solo il problema sarebbe stato reale e non pseudo reale, ma anche molto più interessante dal punto di vista matematico per la determinazione delle infinite discontinuità.

Per come invece ha inteso il proponente è un quesito inadatto per lo scopo che dovrebbe prefiggersi un esame di fine corso, dato che non misura né nozioni né, soprattutto, padronanza delle stesse.