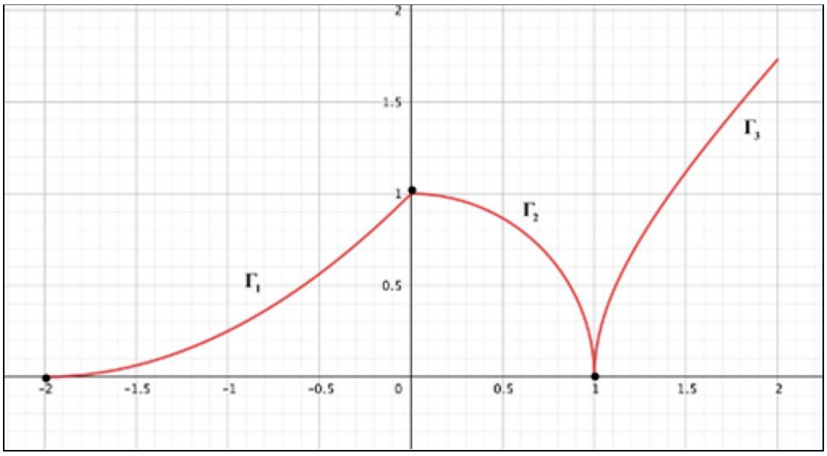
***Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.***

**PROBLEMA 1**

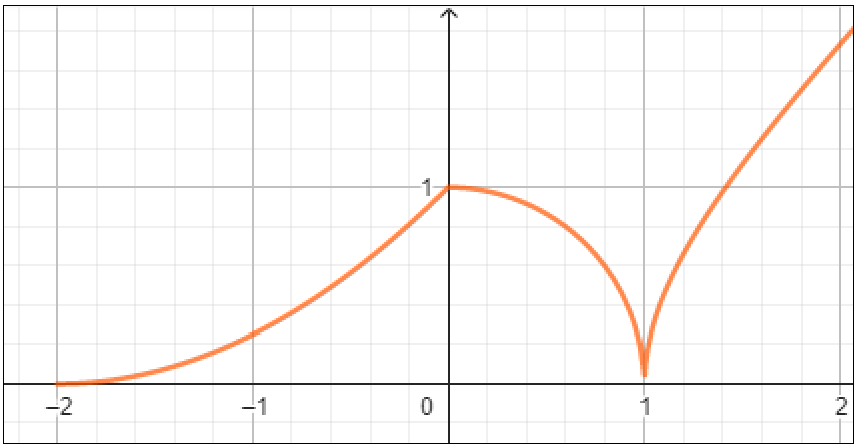
Il grafico in figura, rappresentativo della funzione continua $y = f(x)$, è unione dell'arco di parabola $\Gamma_1$, dell'arco di circonferenza $\Gamma_2$ e dell'arco di iperbole $\Gamma_3$.




Scrivere un'espressione analitica della funzione $f$ definita a tratti nell'intervallo $[-2; 2]$, utilizzando le equazioni: $y = a\,(x + 2)^2$; $x^2 + y^2 + b = 0$; $x^2 - y^2 + c = 0$, e individuare i valori opportuni per i parametri reali $a$, $b$, $c$. Studiare la derivabilità della funzione $f$ e scrivere le equazioni delle eventuali rette tangenti nei punti di ascissa $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

**Soluzione**

Imponiamo il passaggio della funzione per $(-2; 0)$ e per $(0; 1)$: $0 = 0$ e $1 = 4a \Rightarrow a = 1/4$. Lo stesso facciamo per il secondo tratto: $0^2 + 1^2 + b = 0$ e $1^2 + 0^2 + b = 0 \Rightarrow b = -1$, per il terzo: $1^2 - 0^2 + c = 0$ $\Rightarrow c = -1$. Pertanto la funzione richiesta è: $f(x) = \begin{cases} 1/4(x+2)^2 & -2 \le x \le 0 \\ \sqrt{1-x^2} & 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x^2-1} & x \ge 1 \end{cases}$. Confermiamo utilizzando Geogebra




o con una calcolatrice grafica. Gli unici punti in cui può non esservi derivabilità sono quelli di "contatto" fra i rami. Si ha:

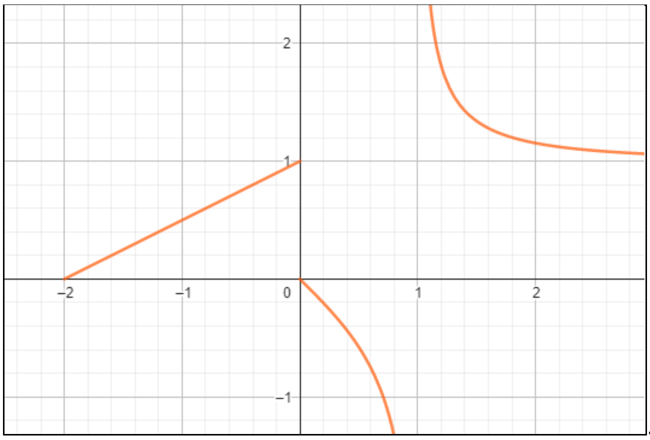
$$f'(x)=\begin{cases}1/2(x+2) & -2<x<0\\ \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} & 0<x<1\\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} & x>1\end{cases} \Rightarrow f'^{+}(-2)=0;\ f'^{-}(0)=1;\ f'^{+}(0)=0;\ f'^{-}(1)=-\infty;\ f'^{+}(1)=+\infty$$

Quindi la funzione non è derivabile in $x = 0$, che è un punto angoloso e in $x = 1$, che è punto cuspidale. La retta tangente in $x = -2$ è l'asse $x$; in $x = 0$ non esiste, vi sono due distinte tangenti, a sinistra: $y = x + 1$ e a destra: $y = 1$; in $x = 1$ la tangente è proprio $x = 1$; in $x = 2$: $f'(2)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, quindi la tangente ha equazione: $y-\sqrt{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x-2)\Rightarrow \sqrt{3}y-2x+1=0$.

a) A partire dal grafico della funzione $f$, dedurre quello della sua derivata $f'$ e individuare gli intervalli di concavità e convessità di $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$.

**Soluzione**

Dall'espressione della derivata il grafico è formato da un segmento in [–2; 0] e da due funzioni che sono entrambe strettamente decrescenti, con un asintoto verticale, $x = 1$, e un asintoto orizzontale destro, $y = 1$, dato che $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1$. Vi è una discontinuità di prima specie in $x = 0$, con salto 1.

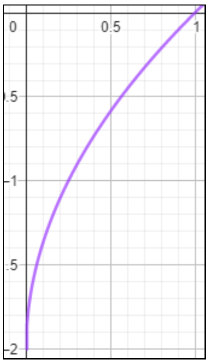
Ecco il grafico: .


Si ha: $F'(x) = f(x) - f(-2)$ e $F''(x) = f'(x)$. Quindi $F''(x)=\begin{cases}1/2 & -2<x<0\\ \dfrac{-1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} & 0<x<1\\ \dfrac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} & x>1\end{cases}$, perciò la funzione volge la concavità verso l'alto (è convessa) per $x < 0$ e $x > 1$, mentre è concava in (0; 1).

b) Si consideri la funzione $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$, definita nell'intervallo $[-2; 0]$, di cui $\Gamma_1$ è il grafico rappresentativo. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa $h$. Studiare la derivabilità di $h$ e tracciarne il grafico.

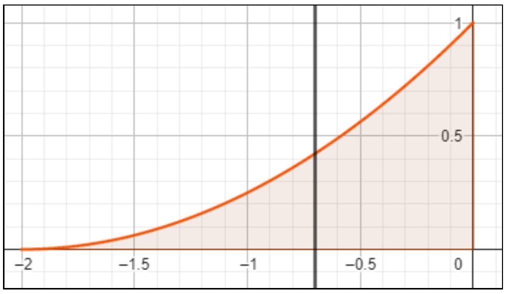
**Soluzione**

La funzione è invertibile perché nell'intervallo, come già visto, è strettamente crescente. Si ha: $y = \frac{(x+2)^2}{4} \Rightarrow x + 2 = \sqrt{4y} \Rightarrow h(x) = 2\sqrt{x} - 2$. $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; non è derivabile in $x = 0$. Il grafico è il seguente:




c) Sia $S$ la regione limitata del secondo quadrante, compresa tra il grafico $\Gamma_1$ e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale $k$ affinché la retta di equazione $x = k$ divida $S$ in due regioni equivalenti.

**Soluzione**




Deve essere

$$\int_{-2}^{k} \frac{(x+2)^2}{4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \frac{(x+2)^2}{4}\,dx \Rightarrow \left[\frac{(x+2)^3}{12}\right]_{-2}^{k} = \frac{1}{2}\left[\frac{(x+2)^3}{12}\right]_{-2}^{0} \Rightarrow \frac{(k+2)^3}{12} = \frac{8}{24} \Rightarrow (k+2)^3 = 4 \Rightarrow$$

$k = \sqrt[3]{4} - 2$.

**PROBLEMA 2**

Fissato un parametro reale $a$, con $a \neq 0$, si consideri la funzione $f_a$ così definita: $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 - a}$, il cui grafico sarà indicato con $\Omega_a$.

a) Al variare del parametro $a$, determinare il dominio di $f_a$, studiarne le eventuali discontinuità e scrivere le equazioni di tutti i suoi asintoti.

**Soluzione**

Si ha: $x^2 - a \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{a}, a \geq 0$. Quindi: $Ide(f) = \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & a < 0 \\ \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{a}\right\} & a \geq 0 \end{cases}$. Per $a \geq 0$ si hanno discontinuità, che sono di II specie se $a \neq 1$, dato che si ha: $\lim_{x \to \pm\sqrt{a}^-} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = -\infty$; $\lim_{x \to \pm\sqrt{a}^+} \frac{x^2 - ax}{x^2 - a} = +\infty$, in questo caso $x = \pm\sqrt{a}, a \neq 1$ sono asintoti verticali bilaterali. Se $a = 1$ invece la discontinuità è di

III specie per $x = 1$: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$, ed ancora di seconda specie per $x = -1$, che è asintoto verticale: $\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+x}{x^2-1}=-\infty$; $\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+x}{x^2-1}=+\infty$. La funzione ha sempre l'asintoto orizzontale $y = 1$: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax}{x^2-a}=1$.

b) Mostrare che, per $a \neq 1$, tutti i grafici $\Omega_a$ intersecano il proprio asintoto orizzontale in uno stesso punto e condividono la stessa retta tangente nell'origine.

**Soluzione**

$\frac{x^2-ax}{x^2-a}=1 \Rightarrow x^2 - ax = x^2 - a \Rightarrow x = 1$. Quindi $(1; 1)$ è l'intersezione dell'asintoto orizzontale con la curva per ogni $a \neq 1$. Se $a = 1$ invece avremmo $x^2 - x = x^2 - 1 \Rightarrow x = 1$, che però annulla il denominatore e quindi non è accettabile. Se $a = 0$ la funzione diventa la costante $y = 1$.

Determiniamo la derivata:

$$f_a'(x)=\frac{(2x-a)\cdot(x^2-a)-2x\cdot(x^2-ax)}{(x^2-a)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-2ax-ax^2+a^2\cancel{-2x^3}+2ax^2}{(x^2-a)^2}=\frac{ax^2-2ax+a^2}{(x^2-a)^2}, a\neq 1$$

$f_a'(0) = 1$ che è il coefficiente angolare della tangente nell'origine, la cui equazione è: $y = x$.

c) Al variare di $a < 1$, individuare gli intervalli di monotonia della funzione $f_a$. Studiare la funzione $f_{-1}(x)$ e tracciarne il grafico $\Omega_{-1}$.

**Soluzione**

La derivata si annulla per $x^2 - 2x + a = 0 \Rightarrow x=1\pm\sqrt{1-a}$, che per $0 < a < 1$, è crescente in $\left(-\infty;1-\sqrt{1-a}\right)\cup\left(1+\sqrt{1-a};+\infty\right)\setminus\left\{\sqrt{a}\right\}$ e decrescente in $\left(1-\sqrt{1-a};1+\sqrt{1-a}\right)\setminus\left\{\sqrt{a}\right\}$.

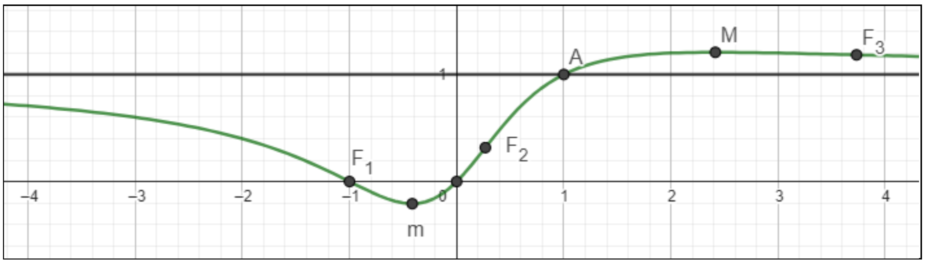
Mentre per $a < 0$ è crescente in $\left(1-\sqrt{1-a};1+\sqrt{1-a}\right)$ e decrescente in $\left(-\infty;1-\sqrt{1-a}\right)\cup\left(1+\sqrt{1-a};+\infty\right)$.

$f_{-1}(x)=\frac{x^2+x}{x^2+1}$, quindi ha un punto di minimo relativo in $\left(1-\sqrt{2};\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$ e un punto di massimo relativo in $\left(1+\sqrt{2};\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$. Passa per i punti $(0; 0)$, $(-1; 0)$. È positiva in $(-\infty; 0) \setminus \{-1\} \cup (1; +\infty)$ e negativa in $(0; 1)$. Si ha:

$$f_{-1}''(x)=\frac{(-2x+2)\cdot(x^2+1)^{\cancel{2}}-(-x^2+2x+1)\cdot 2\cancel{(x^2+1)}\cdot 2x}{(x^2+1)^{\cancel{4}3}}=\frac{-2x^3-2x+2x^2+2+4x^3-8x^2-4x}{(x^2+1)^3}=,$$

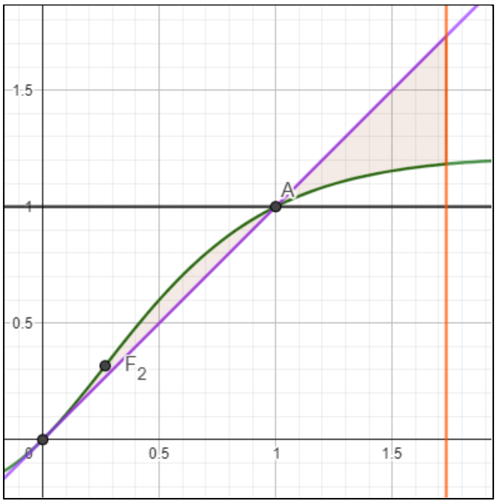
$$=\frac{2x^3-6x^2-6x+2}{(x^2+1)^3}=\frac{2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$$

quindi si hanno flessi in $(-1; 0)$, $\left(2\pm\sqrt{3};\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}\right)$, il grafico è perciò il seguente:




d) Determinare l'area della regione limitata compresa tra il grafico $\Omega_{-1}$, la retta ad esso tangente nell'origine e la retta $x = \sqrt{3}$.

**Soluzione**

Ecco l'area da determinare: 


Si ha: $\int_0^1 \frac{x^2+x}{x^2+1}dx - \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right) - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{x^2+x}{x^2+1}dx - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+x}{x^2+1}dx$.

Calcoliamo a parte

$$\int \frac{x^2+x}{x^2+1}dx = \int\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{x-1}{x^2+1}\right)dx = \int\left(1+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x + ln\sqrt{x^2+1} - tan^{-1}(x) + c.$$

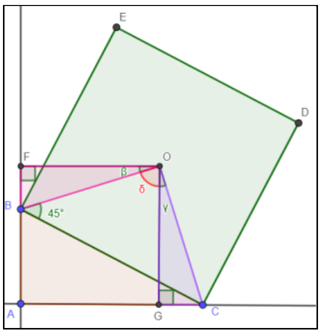
L'area richiesta quindi vale:

$$\frac{1}{2} + \left[x + ln\sqrt{x^2+1} - tan^{-1}(x)\right]_0^1 - \left[x + ln\sqrt{x^2+1} - tan^{-1}(x)\right]_1^{\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{1}{2} + 2\cdot\left(1 + ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} - ln(2) + \frac{\pi}{3} = \frac{15-\pi-6\sqrt{3}}{6} \approx 0,24.$$

**QUESITI**

1. Sia *ABC* un triangolo rettangolo in *A*. Sia *O* il centro del quadrato *BCDE* costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice *A*. Dimostrare che *O* è equidistante dalle rette *AB* e *AC*.

**Soluzione**




I due triangoli *BFO* e *OCG* sono isometrici perché entrambi rettangoli, con l'ipotenusa di uguale misura (il centro di un quadrato dista ugualmente dai vertici) e gli angoli acuti

β e γ isometrici fra loro perché complementari dello stesso angolo δ, dato che le diagonali ovviamente si incontrano ortogonalmente nel centro.
Usando la geometria analitica, abbiamo: $A \equiv (0;\, 0)$, $B \equiv (0;\, b)$, $C \equiv (0;\, c)$

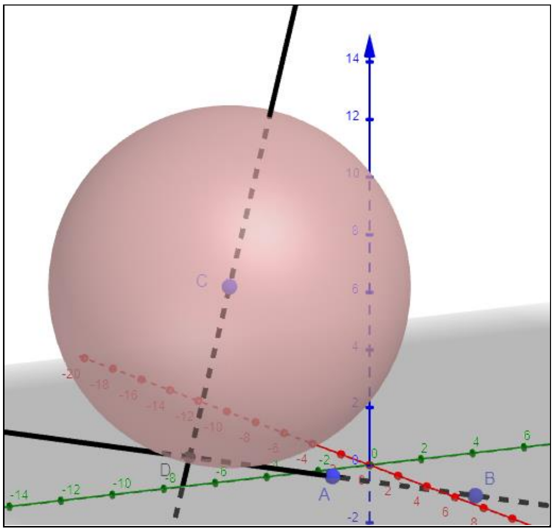
2. Un dado truccato, con le facce numerate da 1 a 6, gode della proprietà di avere ciascuna faccia pari che si presenta con probabilità doppia rispetto a ciascuna faccia dispari. Calcolare le probabilità di ottenere, lanciando una volta il dado, rispettivamente: a) un numero primo; b) un numero almeno pari a 3; c) un numero al più pari a 3.

**Soluzione**

a) Detta $d$ la probabilità che esca un numero dispari e $p$ che esca pari, si ha $p = 2d$ e si ha $3(p + d) = 1 \Rightarrow 9d = 1 \Rightarrow d = 1/9$, $p = 2/9$. I numeri primi che possono uscire sono 2, 3, 5, con probabilità unione di eventi incompatibili: $2/9 + 1/9 + 1/9 = 4/9$.
b) $1/9 + 2/9 + 1/9 + 2/9 = 6/9 = 2/3$.
c) $1/9 + 2/9 + 1/9 = 4/9$.

3. Considerata la retta $r$ passante per i due punti $A \equiv (1;\, -2;\, 0)$ e $B \equiv (2;\, 3;\, -1)$, determinare l'equazione cartesiana della superficie sferica di centro $C \equiv (1;\, -6;\, 7)$ e tangente a $r$.

**Soluzione**




La sfera cercata ha per raggio la distanza di $C$ dalla retta. Dobbiamo quindi determinare l'intersezione $D$ della retta $AB$ e della perpendicolare a essa condotta da $C$. La retta per $AB$ ha numeri direttori: $(2 - 1;\, 3 + 2;\, 0 - 1) \equiv (1;\, 5;\, -1)$, quindi ha equazione: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 5t \\ z = -t \end{cases}$. Il piano per $C$ perpendicolare ad $AB$ ha equazione $(x - 1) + 5(y + 6) - (z + 7) = 0$, perciò il punto $D$ di ottiene imponendo: $(1 + t - 1) + 5(5t - 2 + 6) - (-t + 7) = 0 \Rightarrow 27t + 27 = 0 \Rightarrow t = -1$ $\Rightarrow D \equiv (0;\, -7;\, 1)$ perciò l'equazione cercata è: $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 + (z - 7)^2 = (0 - 1)^2 + (-7 + 6)^2 + (1 - 7)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y - 14z + 48 = 0$.

4. Tra tutti i parallelepipedi a base quadrata di volume $V$, stabilire se quello di area totale minima ha anche diagonale di lunghezza minima.

**Soluzione**

Chiamiamo $x$ il lato della base, l'altezza misura $V/x^2$. L'area totale misura: $S(x) = 4xV/x^2 + 2x^2 = 4V/x + 2x^2$, il ci minimo si ha per $4x - 4V/x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{V}$. La diagonale del parallelepipedo misura:

$\sqrt{\frac{V^2}{x^4}+2x^2}=\frac{\sqrt{V^2+2x^6}}{x^2}$, il cui massimo è lo stesso della funzione al quadrato: $V^2/x^4 + 2x^2$, la cui derivata è: $4x - 4V^2/x^5$, che si annulla per $x=\sqrt[3]{V}$, e quindi la risposta al quesito è positiva.

5. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y=\sqrt{25-x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

**Soluzione**

La curva rappresenta una semicirconferenza di centro l'origine e raggio 5, quindi un metodo consiste nel tracciare la perpendicolare alla diametrale passante per (3; 4), che ha coefficiente angolare –4/3, e perciò è $y - 4 = ¾ (x - 3) \Leftrightarrow 3x - 4y + 7 = 0$. Oppure utilizzando le derivate per determinare il coefficiente angolare: $y'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow y'(3)=\frac{-3}{4}$.

6. Determinare i valori dei parametri reali $a$ e $b$ affinché: $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)-(ax^3+bx)}{x^3}=1$.

**Soluzione**

Il limite è una forma indeterminata 0/0, applichiamo il Teorema di De L'Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-3ax^2-b}{3x^2}$, che per tendere ad 1, deve essere ancora una forma indeterminata 0/0, quindi $\lim_{x\to 0}\left[cos(x)-3ax^2-b\right]=0 \Rightarrow 1-b=0 \Rightarrow b=1$, il limite è divenuto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-3ax^2-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-sin(x)-6ax}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-cos(x)-6a}{6}=\frac{-1-6a}{6}=1 \Rightarrow a=-\frac{7}{6}.$$

7. Si consideri la funzione: $f(x)=\begin{cases}-1+tan^{-1}(x) & x<0\\ ax+b & x\geq 0\end{cases}$. Determinare per quali valori dei parametri reali $a$, $b$ la funzione è derivabile. Stabilire se esiste un intervallo di $\mathbb{R}$ in cui la funzione $f$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle. Motivare la risposta.

**Soluzione**

La funzione deve essere continua $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0^-}\left[-1+tan^{-1}(x)\right]=-1, \lim_{x\to 0^+}(ax+b)=b$ $\Rightarrow$ $b = -1$, e ovviamente derivata sinistra e destra devono essere uguali: $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & x<0\\ a & x>0\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+x^2}=1$

$\Rightarrow a = 1$. A questo punto $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2} & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$, per la validità del Teorema di Rolle deve esistere un intervallo $[a; b]$ in cui si ha $f(a) = f(b)$. Consideriamo i vari casi:

1) $a < b < 0 \Rightarrow -1 + tan^{-1}(a) = -1 + tan^{-1}(b) \Rightarrow tan^{-1}(a) = tan^{-1}(b) \Rightarrow a = b$. Non si può applicare;
2) $a < 0 < b \Rightarrow -1 + tan^{-1}(a) = b - 1 \Rightarrow tan^{-1}(a) = b \Rightarrow a = tan(b)$, che non è possibile perché $a < 0$ e $b > 0$. Non si può applicare;
3) $0 < a < b \Rightarrow a - 1 = b - 1 \Rightarrow a = b$. Non si può applicare;

Si poteva anche osservare che $f'(x) > 0$ quindi la funzione è strettamente crescente e perciò iniettiva.

8. Data la funzione $f_a(x) = x^5 - 5ax + a$, definita nell'insieme dei numeri reali, stabilire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione possiede tre zeri reali distinti.

**Soluzione**

Dato che $\lim_{x \to -\infty} f_a(x) = -\infty, \lim_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$, ed essendo la funzione continua, per il Teorema di esistenza degli zeri ammette sempre almeno uno zero. Inoltre: D[$f_a(x)$] = $5x^4 - 5a$, quindi se $a < 0$ la funzione è strettamente crescente ed ha perciò un solo zero. Se $a > 0$, invece la derivata prima si annulla per $x = \pm\sqrt[4]{a}$, quindi ha due estremi relativi: $m \equiv \left(\sqrt[4]{a}; a\sqrt[4]{a} - 5a\sqrt[4]{a} + a\right) \equiv \left(\sqrt[4]{a}; a - 4a\sqrt[4]{a}\right)$ e $M \equiv \left(-\sqrt[4]{a}; -a\sqrt[4]{a} + 5a\sqrt[4]{a} + a\right) \equiv \left(-\sqrt[4]{a}; a + 4a\sqrt[4]{a}\right)$. Quindi dato che $a + 4a\sqrt[4]{a} > 0$ vi è sempre un altro zero, se $a - 4a\sqrt[4]{a} < 0 \Rightarrow 1 - 4\sqrt[4]{a} < 0 \Rightarrow \sqrt[4]{a} > \frac{1}{4} \Rightarrow a > \frac{1}{256}$, vi è anche un terzo zero.

**COMMENTO**

La prova è di difficoltà bassa, soprattutto non è in grado di differenziare le valutazioni fra gli studenti, dato che non vi sono quesiti obiettivamente più impegnativi, né nel primo, né nel secondo problema. Anche fra i quesiti se ne trovano facilmente quattro che possono essere affrontati senza grossi problemi. In particolare il primo quesito è eccessivamente banale, anche se nell'attuale scuola italiana la geometria è spesso una disciplina trascurata.